

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 17 gennaio 1909.*

F. D' OVIDIO Vicepresidente.

### MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

**Fisica matematica.** — *Sulle azioni meccaniche dovute ad un flusso filiforme di elettricità.* Nota del Corrispondente LEVI-CIVITA.

Consideriamo un flusso stazionario di elettricità nell'etere (o nell'aria, o più generalmente in un mezzo omogeneo impolarizzabile), e supponiamo che l'ambiente T, in cui si svolge questo flusso, abbia forma di tubo sottile (chiuso, od anche aperto; collegato per es. con una estremità ad un generatore e coll'altra ad un collettore).

Il campo elettromagnetico dovuto ad un tale flusso si valuta notoriamente nello stesso modo, secondo tutte le teorie, pre- o post-maxwelliane. E si è condotti ad esprimere una qualunque componente, sia della forza elettrica che della forza magnetica, mediante derivate di potenziali newtoniani estesi al tubo T.

Se il tubo è abbastanza sottile, e si tratta di punti interni, queste derivate sono sostituibili con valori asintotici <sup>(1)</sup>, tanto più approssimati, quanto più sono piccole le dimensioni trasversali rispetto alla lunghezza. Se ne traggono delle espressioni asintotiche per le forze elettromagnetiche in un generico punto Q, interno a T. Il vantaggio essenziale di queste espressioni è che tutto vi dipende esclusivamente da elementi locali (intendo, relativi all'intorno di Q), cioè: dall'andamento longitudinale del tubo (assi-

<sup>(1)</sup> Cfr. le due Note *Sull'attrazione newtoniana di un tubo sottile*, in questi Rendiconti, serie 5<sup>a</sup>, vol. XVII (2° semestre 1908), pp. 413-426 e 535-551.

milato ad una linea geometrica) nell'immediata vicinanza di  $Q$ , dalla sezione (normale alla detta linea) condotta per  $Q$ , e dai caratteri del flusso attraverso alla sezione.

Note le forze elettromagnetiche e il comportamento del moto (densità elettrica e velocità) in  $Q$ , la legge di Lorentz definisce la forza meccanica, che si esercita sopra il circostante elemento. Si può ovviamente dedurne la risultante di tutte le forze, agenti sui varî elementi di una fetta infinitesima di tubo, compresa fra due sezioni vicinissime. Sfruttando sempre (e soltanto) la circostanza che è piccola la sezione del tubo di flusso, si arriva alla espressione asintotica (17) di questa risultante, che è il fine della presente ricerca.

Essa dà luogo ad una nuova teoria dei raggi catodici e delle radiazioni affini, teoria che mi sembra più soddisfacente di quelle elettroniche comunemente accettate, perchè rispetta automaticamente il principio (lorentziano) di relatività, ed è sopra tutto esente da ipotesi cinematiche complementari, non bene giustificate e forse non giustificabili (rigidità di Abraham; contrazione lorentziana; contrazione senza variazione di volume; ecc.).

Avrò l'onore di intrattenerne prossimamente l'Accademia.

1. *Richiamo di espressioni asintotiche.* — Sia  $T$  un tubo sottile tutto costituito da linee di una data congruenza. Dicasi  $L$  una linea generica della congruenza,  $C$  quella tra le  $L$ , che si assume come *direttrice* del tubo.

Sia  $\varrho$  la densità di una distribuzione newtoniana;  $U$  il corrispondente potenziale;  $P$  un punto qualunque della direttrice  $C$ ;  $s$  l'arco, contato a partire da un'origine arbitraria;  $t$  la tangente a  $C$  in  $P$ , nel senso delle  $s$  crescenti;  $n$  la normale principale (nel senso della concavità);  $b$  la binormale (in tal senso, che il triedro  $t, n, b$  risulti *sinistorso*);  $c_p$  la curvatura, sempre nel punto  $P$ ;  $\tau$  la sezione del tubo, normale a  $C$ , condotta per  $P$ ;  $O$  e  $Q$  due punti di  $\tau$ ;  $d\tau_0$  e  $d\tau$  due elementi di sezione ad essi circostanti;  $A = \overline{OQ}$ .

Riferiamo i punti di  $\tau$  a due assi  $x, y$ , ordinatamente coincidenti con  $n$  e con  $b$ .

Dette  $x, y$  ed  $x_0, y_0$  le coordinate di  $Q$  e di  $O$ , si avrà

$$A = |\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}|.$$

Scelti a piacimento un punto  $S$  della sezione, indipendente da  $O$  e da  $Q$ , e una lunghezza costante  $l$ , che sia comparabile con quella del tubo <sup>(1)</sup>

(<sup>1</sup>) Il valore più conveniente di  $l$  è otto volte il raggio per una direttrice circolare, o assimilabile ad un arco di cerchio nel tratto che si considera. Cfr. loc. cit., pag. 550.

(e quindi grande rispetto alle dimensioni trasversali, cioè in particolare rispetto ad ogni  $\mathcal{A}$ ), si ponga

$$(1) \quad \psi = \int_{\tau} \log \frac{l}{\mathcal{A}} d\tau_0,$$

$$(2) \quad U_1 = 2 \varrho_s \psi,$$

dove  $\varrho_s$  designa il valore della densità  $\varrho$  nel punto S.

La  $U_1$ , così definita, è manifestamente funzione delle coordinate  $x, y$  del punto Q, che compariscono in  $\psi$  pel tramite di  $\mathcal{A}$ . Essa dipende inoltre, come è ben manifesto, dalla sezione  $\tau$ , che si considera, e dalla scelta del punto S su questa sezione. Se si conviene che, al variare di P su C, e con esso della sezione normale  $\tau$ , i corrispondenti punti Q ed S scorrano sopra due curve L, la espressione di  $U_1$  rimane univocamente individuata assieme a P, e può quindi anche considerarsi come una ben determinata funzione dell'arco  $s$ .

Ciò posto, sieno  $U_t, U_n, U_b$  le derivate del potenziale U secondo la tangente  $t$  in P, secondo la normale principale ( $n$ , o, ciò che è lo stesso,  $x$ ), e secondo la binormale ( $b$ , o, ciò che è lo stesso,  $y$ ).

Le formule (27) e (28') della seconda delle citate Note (scambiandovi materialmente  $u, v, w$  in  $x, y, s$ ) forniscono per  $U_t, U_n, U_b$  le espressioni asintotiche seguenti:

$$(3) \quad \begin{cases} U_t = \frac{dU_1}{ds} = 2 \frac{d(\varrho_s \psi)}{ds}, \\ U_n = \frac{dU_1}{dx} + \frac{1}{2} c_P U_1 = \varrho_s \left( 2 \frac{d\psi}{dx} + c_P \psi \right), \\ U_b = \frac{dU_1}{dy} = 2 \varrho_s \frac{d\psi}{dy}. \end{cases}$$

L'appellativo *asintotico* va così inteso:

I valori esatti di  $U_t, U_n, U_b$  differiscono dai secondi membri delle (3) per termini che sono dell'ordine della sezione del tubo, mentre i secondi membri stessi sono in generale di un ordine superiore. Più precisamente si può asserire che i termini omissi non superano  $M\delta^2$ , designando  $\delta$  la massima corda di  $\tau$  ed M una quantità positiva, che è costante per un dato tubo (cioè per una data congruenza di linee e per una data  $\varrho$ ) e resta invariata anche se si suppone che il tubo vada indefinitamente assottigliandosi attorno alla direttrice C (loc. cit., pag. 240). All'incontro (per ogni tubo abbastanza sottile)  $U_1$  supera in valore assoluto  $m|\varrho_s|\delta^2 \log \frac{l^2}{\delta^2}$ , dove  $m$  è un coefficiente positivo, che si comporta come M.

2. *Rotor di un potenziale vettore.* — Suppongasi che il tubo T sia sede di un campo vettoriale  $\mathbf{i}$ , diretto in ogni punto secondo la tangente alla linea L passante per quel punto (nel senso in cui si contano gli archi  $s$  della direttrice).

Indicando con  $\alpha, \beta, \gamma$  i coseni direttori di tale tangente rispetto al triedro principale  $t, n, b$  di C in P, si ha, dalla definizione di  $\mathbf{i}$ ,

$$(4) \quad i_t = i\alpha, \quad i_n = i\beta, \quad i_b = i\gamma.$$

Dacchè, in P,  $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$ , in un generico punto S della sezione  $\tau$ , i valori di  $\alpha, \beta, \gamma$  saranno ancora 1, 0, 0, a meno di termini di prim'ordine in  $\delta$ .

D'altra parte (sempre in S e collo stesso ordine di approssimazione)

$$\frac{d\alpha}{ds}, \frac{d\beta}{ds}, \frac{d\gamma}{ds}$$

coincidono colle derivate di  $\alpha, \beta, \gamma$  rapporto all'arco della corrispondente L <sup>(1)</sup>, e sono quindi espresse da  $c\alpha_1, c\beta_1, c\gamma_1$ , essendo  $c$  la curvatura e  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  i coseni direttori della normale principale alla L nel punto S. Siccome poi in P,  $c = c_P, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1, \gamma_1 = 0$ , così in definitiva è lecito ritenere, a meno di termini di prim'ordine in  $\delta$ :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_s = 1, \quad \beta_s = 0, \quad \gamma_s = 0; \\ \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)_s = 0, \quad \left(\frac{d\beta}{ds}\right)_s = c_P, \quad \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)_s = 0. \end{array} \right.$$

Ciò premesso, consideriamo il potenziale vettore  $\mathbf{j}$ , cui dà luogo la distribuzione vettoriale.

Ad ognuna delle componenti  $j_t, j_n, j_b$  si può senz'altro applicare quanto è stato detto al n. 1 per un generico potenziale U: basterà soltanto sostituire la densità  $\varrho$  con  $i_t, i_n, i_b$  ordinatamente. Le espressioni asintotiche delle nove derivate

$$\frac{dj_t}{ds} = j_{t|t}, \quad \frac{dj_t}{dx} = j_{t|n}, \quad \frac{dj_t}{dy} = j_{t|b},$$

$$\frac{dj_n}{ds} = j_{n|t}, \text{ ecc.}$$

saranno perciò fornite dalle (3), ponendovi materialmente, una prima volta

$$U = j_t \text{ e } \varrho_s = (i_t)_s = i_s \alpha_s, \text{ poi } U = j_n \text{ e } \varrho_s = (i_n)_s = i_s \beta_s,$$

infine

$$U = j_b \text{ e } \varrho_s = (i_b)_s = i_s \gamma_s.$$

(1) Cfr. per tutto ciò i dettagliati sviluppi della precedente ricerca (pp. 544-545).

Ove si osservi che  $\psi$  e le sue derivate (pur non arrivando in generale al second'ordine, come si è ricordato alla fine del n. 1) sono di *prim'ordine* almeno rispetto a  $\delta$ , potremo, *a meno di termini di second'ordine*, introdurre, per  $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$  e loro derivate, i valori (5) e ottenere così:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} j_{t|t} = 2 \frac{d(i_s \alpha_s \psi)}{ds} = 2 \frac{d(i_s \psi)}{ds}, \quad j_{t|n} = i_s \left( 2 \frac{d\psi}{dx} + c_p \psi \right), \\ j_{t|b} = 2 i_s \frac{d\psi}{dy}; \\ j_{n|t} = 2 \frac{d(i_s \beta_s \psi)}{ds} = 2 i_s c_p \psi, \quad j_{n|n} = 0, \quad j_{n|b} = 0; \\ j_{b|t} = 0, \quad j_{b|n} = 0, \quad j_{b|b} = 0. \end{array} \right.$$

In base a queste formule, ove si ponga

$$(7) \quad \mathbf{H} = -\text{rot } \mathbf{j},$$

si hanno, per le componenti di  $\mathbf{H}$ , le espressioni asintotiche

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_t = -(j_{n|b} - j_{b|n}) = 0, \\ H_n = -(j_{b|t} - j_{t|b}) = 2 i_s \frac{d\psi}{dy}, \\ H_b = -(j_{t|n} - j_{n|t}) = i_s c_p \psi - 2 i_s \frac{d\psi}{dx}. \end{array} \right.$$

3. *Flusso stazionario di elettricità nel tubo e corrispondente campo elettromagnetico.* — Sia  $T$  sede di un flusso di elettricità, avente le  $L$  per linee di corrente. Supposto il flusso stazionario, sarà tutto indipendente dal tempo e funzione soltanto del posto.

Ove  $\varrho$  e  $\mathbf{v}$  rappresentino rispettivamente la densità e la velocità dell'elettricità in un punto generico, e  $A$  l'inversa della velocità della luce, il vettore

$$(9) \quad \mathbf{i} = A \varrho \mathbf{v}$$

misurerà la corrente (in unità elettromagnetiche).

Riferendosi per tutto il resto al sistema elettrostatico (costante di Coulomb eguale ad 1), la funzione  $U$ , di cui al n. 1, potrà riguardarsi come il potenziale scalare, il vettore  $\mathbf{j}$ , di cui al n. 2, come il potenziale vettore del nostro campo.

La forza elettrica  $\mathbf{E}$ , in un punto generico  $Q$  del campo, è il gradiente di  $U$  cambiato di segno: essa coincide quindi coll'attrazione newtoniana, dovuta a una massa di densità  $-\varrho$ .

A norma della legge di Biot e Savart (ove sia *sinistrorso* il triedro di riferimento, come lo è, per definizione, il nostro  $t, n, b$ ), la forza magne-

tica  $\mathbf{H}$  è definita dalla (7); alle sue componenti competono pertanto le espressioni asintotiche (8).

La forza meccanica in  $Q$  (riferita all'unità di volume) consta, secondo Lorentz (nel caso presente, anche secondo le altre teorie), dei due contributi

$$\begin{aligned} & \varrho \mathbf{E} \\ & \mathbf{H} \wedge \mathbf{i} \quad (1), \end{aligned}$$

in cui la  $\varrho$  e i tre vettori  $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{i}$  si riferiscono al punto  $Q$ .

Consideriamo la fetta di tubo compresa fra la sezione generica  $\tau$  e una sezione vicinissima distante  $ds$ .

L'elemento di volume circostante a  $Q$  è espresso da  $d\tau \cdot ds$ . Ove si ponga

$$(10) \quad \Phi_1 = \int_{\tau} \varrho \mathbf{E} d\tau,$$

$$(11) \quad \Phi_2 = \int_{\tau} (\mathbf{H} \wedge \mathbf{i}) d\tau,$$

$(\Phi_1 + \Phi_2) ds$  rappresenta evidentemente la risultante delle forze meccaniche, che si esercitano sulla accennata fetta. Perciò

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

è la forza complessiva, riferita all'unità di lunghezza del tubo.

4. *Espressione asintotica di  $\Phi_1$ .* — Come abbiamo rilevato or ora, la forza elettrica  $\mathbf{E}$  (in un punto generico  $Q$ ) coincide coll'attrazione newtoniana (del tubo  $T$ , in  $Q$ ), dovuta ad una distribuzione di densità  $-\varrho$ .

—  $\mathbf{E}$  è così l'attrazione, corrispondente alla densità  $\varrho$ , e  $-\Phi_1 \cdot ds$  rappresenta di conseguenza la risultante delle attrazioni, subite dalla fetta elementare considerata.

Dato questo significato, diviene superfluo il calcolo diretto di  $\Phi_1$ . Basta riportarsi alla seconda delle Note, già più volte ricordate [formule (33)].

Pongasi in conformità

$$(12) \quad \nu = \int_{\tau} \varrho d\tau,$$

con che  $\nu$  rappresenta la densità elettrica *lineare* (rapporto fra la carica della fetta e il suo spessore  $ds$ ) in una posizione generica del tubo, individuata dalla sezione  $\tau$ , o, se si vuole, dal punto  $P$  della direttrice.

(1) Conformemente alle proposte dei signori Marcolongo e Burali-Forti (cfr. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXIV, 1907), uso il segno  $\wedge$  per indicare un prodotto vettoriale.

Pongasi ancora

$$(13) \quad k = \frac{1}{\tau^2} \int_{\tau} \psi d\tau = \frac{1}{\tau^2} \int_{\tau} d\tau \int_{\tau_0} d\tau_0 \log \frac{l}{A},$$

con che  $k$  è un puro numero, dipendente esclusivamente dalla configurazione geometrica della sezione  $\tau$  ( $le^{-k}$  rappresenta la media geometrica delle mutue distanze; cfr. Maxwell, Collected papers, vol. II, pag. 280).

Tanto  $\nu$ , quanto  $k$ , hanno, come si vede, valori ben determinati, una volta fissata la sezione, ossia il punto  $P$ ; possono quindi considerarsi funzioni dell'arco  $s$  della direttrice  $C$ .

Per mezzo di queste quantità, le tre componenti di  $\Phi_1$  si esprimono, a meno di termini dell'ordine di  $\delta^4$ , sotto la forma seguente:

$$(14) \quad \Phi_{1|t} = -\frac{d}{ds}(\nu^2 k), \quad \Phi_{1|n} = -\nu^2 kc, \quad \Phi_{1|b} = 0,$$

dove, per brevità, ho scritto  $c$  in luogo di  $c_P$ .

5. *Espressione asintotica di  $\Phi_2$  e della forza risultante  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ .* — Nel secondo membro della (11), il vettore  $\mathbf{i}$  si riferisce, al pari di  $\mathbf{H}$ , al punto (variabile)  $Q$ , rispetto al quale si integra. Si può però, a meno di termini dell'ordine di  $\delta^4$ , sostituire  $\mathbf{i}$  col vettore  $\mathbf{i}_s$ , relativo al punto fisso  $S$ .

Infatti la differenza  $\mathbf{i} - \mathbf{i}_s$  è di prim'ordine rispetto a  $\delta$ ; d'altra parte  $\mathbf{H}$  (che ha per componenti delle differenze di derivate di potenziali newtoniani) si comporta come l'attrazione, ed è quindi anch'essa di prim'ordine almeno.

Ne viene che il prodotto vettoriale

$$\mathbf{H} \wedge (\mathbf{i} - \mathbf{i}_s)$$

è almeno di second'ordine, e il relativo integrale

$$\int_{\tau} \{ \mathbf{H} \wedge (\mathbf{i} - \mathbf{i}_s) \} d\tau$$

di quarto.

Si ha dunque, a meno di termini dell'ordine di  $\delta^4$ ,

$$(11') \quad \Phi_2 = \int_{\tau} (\mathbf{H} \wedge \mathbf{i}_s) d\tau.$$

Colla stessa approssimazione, si possono adottare, per i coseni direttori  $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$  di  $\mathbf{i}_s$ , i valori (5), e quindi, per le componenti, i valori

$$i_s, 0, 0.$$

Badando alle (8) ed esplicitando in conformità il prodotto vettoriale  $\mathbf{H} \wedge \mathbf{i}_s$ , la (11') dà:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{2|t} = 0, \\ \Phi_{2|n} = i_s^2 c_P \int_{\tau} \psi d\tau - 2i_s^2 \int_{\tau} \frac{d\psi}{dx} d\tau, \\ \Phi_{2|b} = -2i_s^2 \int_{\tau} \frac{d\psi}{dy} d\tau. \end{array} \right.$$

Dacchè, in base alla (1),

$$\frac{d\psi}{dx} = - \int_{\tau} \frac{x - x_0}{A^2} d\tau_0, \quad \frac{d\psi}{dy} = - \int_{\tau} \frac{y - y_0}{A^2} d\tau_0.$$

è chiaro che i due integrali quadrupli

$$\int_{\tau} \frac{d\psi}{dx} d\tau, \quad \int_{\tau} \frac{d\psi}{dy} d\tau$$

si annullano. Immaginiamo infatti di scambiarsi i due punti di integrazione O e Q. Da un lato, questo scambio materiale di notazione non altera i valori degli integrali; d'altra parte, il suo effetto formale è di mutare  $x - x_0, y - y_0$  in  $x_0 - x, y_0 - y$ , cioè il segno, tutto il resto rimanendo invariato. Il valore numerico dei due integrali non può dunque essere che lo zero, c. d. d.

Rimane con ciò, ove al terzo integrale  $\int_{\tau} \psi d\tau$  si sostituisca il suo valore (13),

$$\Phi_{2|t} = 0, \quad \Phi_{2|n} = i_s^2 \tau^2 k c_P, \quad \Phi_{2|b} = 0.$$

S designa un punto, che può essere scelto arbitrariamente entro la sezione  $\tau$ . Gioverà trar partito da questa arbitrarietà per attribuire a  $\Phi_{2|n}$  una forma più espressiva.

Introduciamo all'uopo la *corrente totale* I che passa attraverso  $\tau$ .

Questa I, data la stazionarietà, deve essere una costante caratteristica del flusso che si considera, indipendente quindi anche dalla posizione della sezione nel tubo. Comunque, essa ha ovviamente per espressione

$$I = \int_{\tau} i \alpha d\tau.$$

Dacchè  $\alpha$  differisce dall'unità per termini di prim'ordine in  $\delta$ , si avrà, a meno di termini di quest'ordine,

$$I = \int_{\tau} i d\tau,$$

e quindi, per il teorema della media, eguale a  $i_s \tau$ , indicando S un conveniente punto di  $\tau$ .

Si può dunque scrivere, colla solita approssimazione, cioè a meno di termini di quart'ordine in  $\delta$ ,

$$(15) \quad \Phi_{2|t} = 0, \quad \Phi_{2|n} = I^2 k c, \quad \Phi_{2|b} = 0,$$

dove [come già nelle (14)] ho soppresso l'indice P della curvatura  $c$ , perchè, al pari di  $k$  e di  $\nu$ , anche  $I$  è un elemento globale, e non c'è da mettere in evidenza alcun altro punto della sezione, oltre a P.

Nelle (14) figura la densità lineare  $\nu$ . Può essere conveniente farvi apparire, in luogo di  $\nu$ , un elemento puramente cinematico. Ecco in qual modo.

Ricorriamo alla (9) e osserviamo che, essendo

$$I = \int_{\tau} i a d\tau = A \int_{\tau} \varrho v a d\tau,$$

si può, a meno di termini in  $\delta$ , sostituire a  $\varrho$  il suo valore medio  $\frac{\nu}{\tau}$ , il che dà

$$I = \nu \cdot A \frac{1}{\tau} \int_{\tau} v a d\tau.$$

Ora  $\frac{1}{\tau} \int_{\tau} v a d\tau$  è il valore medio della velocità del flusso attraverso la sezione  $\tau$ .

Si ha dunque, a meno di termini in  $\delta$ ,

$$(16) \quad I = \nu \beta,$$

designandosi ora <sup>(1)</sup> con  $\beta$  il rapporto  $A \frac{1}{\tau} \int_{\tau} v a d\tau$  fra la velocità media del flusso, attraverso  $\tau$ , e la velocità della luce.

Ne viene che, colla solita approssimazione, cioè a meno di termini dell'ordine di  $\delta^4$ , si può, nelle (14), sostituire alla densità  $\nu$  il rapporto  $\frac{I}{\beta}$ .

Con ciò la forza meccanica risultante

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

rimane asintoticamente definita sotto la forma seguente:

$$(17) \quad \Phi_t = -I^2 \frac{d}{ds} \left( \frac{k}{\beta^2} \right), \quad \Phi_n = -I^2 \frac{k}{\beta^2} c (1 - \beta^2), \quad \Phi_b = 0.$$

<sup>(1)</sup> Al n. 2 era stato indicato con  $\beta$  un coseno direttore. Questo coseno non figura nelle formule finali. Si può pertanto, senza pericolo di ambiguità, riprendere la lettera  $\beta$ , attribuendole un diverso significato.

Rammento, per comodo di consultazione, che  $t, n, b, c, s, \tau$  hanno il significato dichiarato al n. 1 (essendosi soltanto soppresso l'indice P di  $c$ );  $k$  è definito dalla (13);  $I$  misura la corrente totale (in unità elettromagnetiche); infine  $\beta$  rappresenta il rapporto fra la velocità media del flusso attraverso  $\tau$  e la velocità della luce.

Riservo ad una prossima Nota l'applicazione di queste formule al caso, in cui il tubo T è sede di un campo elettromagnetico puro.

**Fisica matematica.** — *Teoria asintotica delle radiazioni elettriche.* Nota del Corrispondente LEVI-CIVITA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Alcune nuove espressioni assolute delle curvature in un punto di una superficie.* Nota di C. BURALI-FORTI, presentata dal Corrispondente LEVI-CIVITA.

Il punto variabile P descriva una superficie  $\Sigma$ , e sia  $N$  il vettore unitario, funzione di P, normale a  $\Sigma$  in P e di verso stabilito rispetto a  $\Sigma$ . Per abbreviare la scrittura, si ponga

$$\sigma = \frac{dN}{dP}$$

cioè si indichi con  $\sigma$  l'omografia vettoriale che trasforma uno spostamento qualsiasi  $dP$  di P nel corrispondente spostamento  $dN$  di  $N$ .

Se  $x$  è vettore unitario, pure funzione di P, e normale ad  $N$ , per la curvatura normale  $\mathfrak{N}_x$ , geodetica  $\mathfrak{Q}_x$  e per la torsione geodetica  $\mathfrak{T}_x$  in P nella direzione  $x$ , si ha

$$(I) \quad \mathfrak{N}_x = N \wedge x \times \text{rot } x = x \times \sigma x = \frac{(\sigma x)^2 + \text{inv}_2 \sigma}{\text{inv}_1 \sigma}$$

$$(II) \quad \mathfrak{Q}_x = -N \times \text{rot } x = \text{div } (N \wedge x)$$

$$(III) \quad \mathfrak{T}_x = N \wedge x \times \sigma x = x \times \sigma (N \wedge x) \quad (1).$$

(1) Per le notazioni, cfr. C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Per l'unificazione delle notazioni vettoriali*, Rendiconti Palermo, t. XXIII-XXIV, Note I-V.

Per le omografie vettoriali e per le derivate rispetto a un punto, cfr. C. Burali-Forti, *Sopra alcune operazioni proiettive....* (1906), *Sulle omografie vettoriali* (1907), *Funzioni vettoriali* (1907), Atti Acc. Torino, *L'importance des transformations....* (1908), *L'enseignement mathématique*. Alla notazione  $\nabla_P$  della prima Nota sostituiamo  $\frac{d}{dP}$ ; le notazioni  $D_u, K_u$  della terza Nota equivalgono a  $\frac{du}{dP}, K \frac{du}{dP}$ .

Se  $\varphi$  è numero reale funzione di  $P$ , e  $\mathfrak{N}_\varphi, \mathfrak{Q}_\varphi, \mathfrak{T}_\varphi$  sono i valori di  $\mathfrak{N}_x, \mathfrak{Q}_x, \mathfrak{T}_x$  per  $x$  parallelo alla tangente in  $P$  alla linea  $\varphi = \text{cost}$ , allora

$$(I') \quad \mathfrak{N}_\varphi = \text{inv}_1 \sigma - \frac{\text{grad } \varphi \times \sigma \text{ grad } \varphi}{(\text{grad } \varphi)^2}$$

$$(II') \quad \mathfrak{Q}_\varphi = - \text{div} \frac{\text{grad } \varphi}{\text{mod grad } \varphi}$$

$$(III') \quad \mathfrak{T}_\varphi = - \frac{\mathbf{N} \wedge \text{grad } \varphi \times \sigma \text{ grad } \varphi}{(\text{grad } \varphi)^2}.$$

Inoltre,  $\text{inv}_1 \sigma, \text{inv}_2 \sigma$  sono, rispettivamente, la *curvatura MEDIA* e *TOTALE* (o di Gauss) di  $\Sigma$  nel punto  $P$ .

Queste forme di  $\mathfrak{N}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{T}$  e delle curvatures media e totale, sono *assolute*, cioè sono indipendenti tanto da coordinate cartesiane, quanto da coordinate curvilinee in  $\Sigma$ . Si dimostrano, in modo pure assoluto e semplicissimo, applicando, insieme ad altre ben note regole di calcolo vettoriale, le regole seguenti meno usuali:

$$(\alpha) \quad \mathbf{u} \times \sigma \mathbf{v} = \mathbf{v} \times K \sigma \mathbf{u} \quad , \quad K K \sigma = \sigma$$

$$(\beta) \quad \sigma(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\text{inv}_1 \sigma) \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} - \mathbf{u} \wedge K \sigma \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge K \sigma \mathbf{u}$$

$$(\gamma) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d(\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{dP} \mathbf{w} = \left( K \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{v} \right) \times \mathbf{w} + \left( K \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{u} \right) \times \mathbf{w} \\ \text{grad}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = K \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{v} + K \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{u} \quad , \quad \text{grad } \mathbf{u}^2 = 2K \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{u} \end{array} \right.$$

$$(\delta) \quad \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{u} = (\text{rot } \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u} + \frac{1}{2} \text{grad } \mathbf{u}^2$$

e nelle quali  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  sono vettori e  $\sigma$  è omografia vettoriale.

1. Per dimostrare quanto abbiamo affermato riguardo alle curvatures, occorre esaminare le seguenti proprietà di  $\sigma$ .

*L'omografia  $\sigma$  trasforma un vettore qualsiasi in un vettore parallelo al piano tangente a  $\Sigma$  nel punto  $P$ , cioè*

$$(1) \quad \mathbf{N} \times \sigma \mathbf{x} = 0, \text{ qualunque sia il vettore } \mathbf{x}.$$

Dall'ultima  $(\gamma)$ , per essere  $\text{grad } \mathbf{N}^2 = \text{grad } 1 = 0$  si trae  $K \sigma \mathbf{N} = 0$ ; quindi  $\mathbf{x} \times K \sigma \mathbf{N} = 0$  e da  $(\alpha)$  la (1).

*Il vettore  $\sigma \mathbf{N}$  è nullo. Il vettore dell'omografia  $\sigma$  è nullo e quindi è nulla anche la rotazione di  $\mathbf{N}$ , e  $K \sigma$  coincide con  $\sigma$ , cioè*

$$(2) \quad \sigma \mathbf{N} = 0 \quad , \quad V \sigma = 0 \quad , \quad \text{rot } \mathbf{N} = 0 \quad , \quad K \sigma = \sigma.$$

Il punto  $P + \mathbf{u}$ , con  $\mathbf{u}$  vettore tale che  $\mathbf{u} \times \sigma \mathbf{u} = \text{cost}$ , descrive una quadrica  $\theta$ , che non è propria, perchè  $K \sigma \mathbf{N} = 0$  cioè  $K \sigma$  e  $\sigma$  sono dege-

neri. Il cono assintoto di  $\theta$  si ha per  $\mathbf{u} \times \sigma \mathbf{u} = 0$ ; ora a tale condizione soddisfano i vettori paralleli ad  $\mathbf{N}$  (per la (1)): e quindi il cono, o è formato dalla sola normale a  $\Sigma$  in  $P$ , o da due piani uscenti da questa retta ( $\Sigma$  non sia un piano). In ogni caso  $\mathbf{N}$  è *direzione principale* di  $\theta$  ed è quindi vettore *unito* per la *dilatazione* di  $\sigma$  (per  $D\sigma$ ), cioè esiste un numero reale  $h$  tale che  $D\sigma \mathbf{N} = h\mathbf{N}$ . In conseguenza

$$\sigma \mathbf{N} = D\sigma \mathbf{N} + (\nabla \sigma) \wedge \mathbf{N} = h\mathbf{N} + (\nabla \sigma) \wedge \mathbf{N};$$

ma da (d) si ha, essendo  $\text{grad } \mathbf{N}^2 = 0$ ,

$$\sigma \mathbf{N} = (\text{rot } \mathbf{N}) \wedge \mathbf{N} = 2(\nabla \sigma) \wedge \mathbf{N},$$

che combinata con la precedente dà

$$\sigma \mathbf{N} = h\mathbf{N} + \frac{1}{2} \sigma \mathbf{N} \text{ da cui } \sigma \mathbf{N} = 2h\mathbf{N},$$

e, per le (1),  $0 = \mathbf{N} \times \sigma \mathbf{N} = 2h$ ,  $h = 0$  cioè  $\sigma \mathbf{N} = 0$ .

Fissato, ad es.,  $\mathbf{u}$  normale ad  $\mathbf{N}$ , il numero  $\mathbf{u} \times \sigma \mathbf{u}$  è determinato e, se non è nullo,  $\theta$  è un cilindro con le generatrici parallele ad  $\mathbf{N}$ , perchè per  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + h\mathbf{N}$  si ha  $\mathbf{v} \times \sigma \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \sigma \mathbf{u}$ . La sezione retta, per  $P$  (indicatrice di Dupin) di questo cilindro è una conica che ammette sempre due, o infiniti, *assi* le cui direzioni (delle *lines di curvatura* in  $P$ ) sono unite rispetto a  $\sigma$ . Allora, se  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  sono vettori unitari e ortogonali nelle direzioni degli assi, sarà  $\mathbf{x} \wedge \sigma \mathbf{x} = 0$ ,  $\mathbf{y} \wedge \sigma \mathbf{y} = 0$  e quindi

$$2\nabla \sigma = \mathbf{x} \wedge \sigma \mathbf{x} + \mathbf{y} \wedge \sigma \mathbf{y} \pm \mathbf{N} \wedge \sigma \mathbf{N} = 0,$$

cioè  $\nabla \sigma = 0$  e  $\text{rot } \mathbf{N} = 0$ .

Dall'essere  $\nabla \sigma = 0$  risulta subito che  $K\sigma = \sigma$  perchè  $\sigma = D\sigma + (\nabla \sigma) \wedge$  e  $K\sigma = D\sigma - (\nabla \sigma) \wedge$ .

Se  $\varphi$  è numero reale, funzione di  $P$ , il suo gradiente è normale ad  $\mathbf{N}$ , cioè

$$(3) \quad \mathbf{N} \times \text{grad } \varphi = 0,$$

e quindi:  $\text{grad } \varphi$  è la direzione di quella normale in  $P$  alla linea  $\varphi = \text{cost}$  che giace nel piano tangente a  $\Sigma$  e  $\mathbf{N} \wedge \text{grad } \varphi$  è la direzione della tangente in  $P$  alla stessa linea.

Sia  $\psi$  un altro numero funzione di  $P$ . Per ogni punto di  $\Sigma$ , in un certo intorno di  $P$ , passi una sola linea  $\varphi$  e una sola linea  $\psi$  che in ciascun punto del campo abbiano tangenti determinate e non parallele. Il punto  $P$  è, in tale intorno, funzione di  $\varphi$  e  $\psi$ ;  $P'_\varphi$  e  $P'_\psi$  siano le sue derivate parziali rispetto a  $\varphi$  e  $\psi$ , e il verso di  $\mathbf{N}$  sia tale che

$$\mathbf{N} = \frac{P'_\varphi \wedge P'_\psi}{\text{mod}(P'_\varphi \wedge P'_\psi)} = \frac{P'_\varphi \wedge P'_\psi}{m}.$$

Se ora moltiplichiamo internamente ( $\times$ ) i due membri della identità

$$dP = P'_{\varphi} d\varphi + P'_{\psi} d\psi$$

per  $N \wedge P'_{\psi}$ , si ha

$$d\varphi = -\frac{1}{m} N \wedge P'_{\psi} \times dP; \text{ da cui, } \text{grad } \varphi = -\frac{1}{m} N \wedge P'_{\psi}$$

che dimostra quanto abbiamo affermato.

2. Dimostriamo ora le formule (I)-(III').

Siano  $\gamma, \gamma'$  due linee di  $\Sigma$ , uscenti da P, ed aventi, nel punto P, la *tangente, normale principale e binormale*, parallele, rispettivamente, ai vettori

$$\mathbf{x}, \mathbf{N}, \mathbf{N} \wedge \mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{x}, \mathbf{N} \wedge \mathbf{x}, \mathbf{N},$$

essendo  $\mathbf{x}$  vettore unitario normale ad  $\mathbf{N}$ .

I numeri  $\mathfrak{O}_{\mathbf{x}}, \mathfrak{G}_{\mathbf{x}}$  si definiscono di solito, almeno in sostanza, come *flessioni* in P, rispettivamente, di  $\gamma, \gamma'$  e  $\mathfrak{C}_{\mathbf{x}}$  come *torsione* in P di  $\gamma$ , o, il che equivale a meno del segno, di  $\gamma'$ . Allora se osserviamo che, essendo  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  vettori,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{v}$$

è la « derivata di  $\mathbf{u}$  presa nella direzione  $\mathbf{v}$  » <sup>(1)</sup> e ricordiamo le *formule vettoriali* di Frenet, si ha, stabilendo i segni di  $\mathfrak{O}, \mathfrak{G}, \mathfrak{C}$ ,

$$(4) \quad \mathfrak{O}_{\mathbf{x}} = \left( \frac{d\mathbf{N}}{dP} \mathbf{x} \right) \times \mathbf{x} = - \left( \frac{d\mathbf{x}}{dP} \mathbf{x} \right) \times \mathbf{N}$$

$$(5) \quad \mathfrak{G}_{\mathbf{x}} = \left( \frac{d(\mathbf{N} \wedge \mathbf{x})}{dP} \mathbf{x} \right) \times \mathbf{x} = - \left( \frac{d\mathbf{x}}{dP} \mathbf{x} \right) \times \mathbf{N} \wedge \mathbf{x}$$

$$(6) \quad \mathfrak{C}_{\mathbf{x}} = \left( \frac{d\mathbf{N}}{dP} \mathbf{x} \right) \times \mathbf{N} \wedge \mathbf{x} = - \left( \frac{d(\mathbf{N} \wedge \mathbf{x})}{dP} \mathbf{x} \right) \times \mathbf{N}.$$

Gli ultimi membri sono stati ottenuti dai primi (definizioni) applicando alle identità

$$\mathbf{N} \times \mathbf{x} = 0 \quad , \quad (\mathbf{N} \wedge \mathbf{x}) \times \mathbf{x} = 0 \quad , \quad \mathbf{N} \times (\mathbf{N} \wedge \mathbf{x}) = 0$$

le regole di calcolo vettoriale ( $\gamma$ ) e ( $\alpha$ ).

Da ( $\delta$ ), per essere  $\mathbf{x}^2 = 1$ , si trae  $\frac{d\mathbf{x}}{dP} \mathbf{x} = (\text{rot } \mathbf{x}) \wedge \mathbf{x}$ , e dalle (4)

<sup>(1)</sup> Qualunque sia l'ente  $m$ , funzione di P,  $\frac{dm}{dP} \mathbf{v}$  dà, sotto forma assoluta, il *quoziente differenziale di m nella direzione v* così opportunamente considerato dal Cesàro (Geometria intrinseca). Per una definizione quasi assoluta del quoziente differenziale cfr. C. Burali-Forti, *Lezioni di geometria metrico-proiettiva*, Torino, Bocca, 1904.

risultano subito le due prime forme della (1). Per ottenere la terza forma si osservi che in virtù delle (1), (2), ( $\beta$ ) si ha

$$(a) \quad \text{inv}_2 \sigma = \sigma \mathbf{x} \wedge \sigma(\mathbf{N} \wedge \mathbf{x}) \times \mathbf{N} = \sigma \mathbf{x} \times \{(\text{inv}_1 \sigma) \mathbf{N} \wedge \mathbf{x} - \mathbf{N} \wedge \sigma \mathbf{x}\} \times \mathbf{N} = \\ = (\text{inv}_1 \sigma) \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{x} - (\sigma \mathbf{x})^2 = (\text{inv}_1 \sigma) \mathfrak{C}_{\mathbf{x}} - (\sigma \mathbf{x})^2.$$

Nello stesso modo dalla seconda forma (5) si trae (eseguendo il prodotto interno dei due prodotti vettoriali) la prima forma della (II) e da questa la seconda mediante la nota formula

$$\text{div}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{v}$$

e tenendo conto della (2).

Le (III) si ottengono subito da (6) con la ( $\alpha$ ).

Per avere le (I'), (II'), (III') basta porre nelle corrispondenti, in virtù della (3),

$$\mathbf{x} = \mathbf{N} \wedge \frac{\text{grad } \varphi}{\text{mod grad } \varphi}.$$

Dalle seconde forme (II) e (III) si ottengono subito le (II'), (III'). La (I') si ottiene osservando che dalla seconda forma (I) si ha

$$(b) \quad \mathfrak{C}_{\mathbf{N} \wedge \mathbf{x}} = \mathbf{N} \wedge \mathbf{x} \times \sigma(\mathbf{N} \wedge \mathbf{x}) = \mathbf{N} \wedge \mathbf{x} \times \{(\text{inv}_1 \sigma) \mathbf{N} \wedge \mathbf{x} - \mathbf{N} \wedge \sigma \mathbf{x}\} \\ = \text{inv}_1 \sigma - \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{x} = \text{inv}_1 \sigma - \mathfrak{C}_{\mathbf{x}}.$$

Che  $\text{inv}_1 \sigma$  e  $\text{inv}_2 \sigma$  siano le curvature media e totale di  $\Sigma$  in P appare dalle formule

$$(7) \quad \mathfrak{C}_{\mathbf{x}} + \mathfrak{C}_{\mathbf{N} \wedge \mathbf{x}} = \text{inv}_1 \sigma$$

$$(8) \quad \mathfrak{C}_{\mathbf{x}} \mathfrak{C}_{\mathbf{N} \wedge \mathbf{x}} - (\mathfrak{C}_{\mathbf{x}})^2 = \text{inv}_2 \sigma \quad (1);$$

la (7) è dimostrata dalla (b); la (8) risulta da (a) osservando che

$$\mathfrak{C}_{\mathbf{x}} \mathfrak{C}_{\mathbf{N} \wedge \mathbf{x}} - (\mathfrak{C}_{\mathbf{x}})^2 = \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{x} (\text{inv}_1 \sigma - \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{x}) - (\mathbf{N} \wedge \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{x})^2 = \\ = (\text{inv}_1 \sigma) \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{x} - \{(\mathbf{x} \times \sigma \mathbf{x})^2 + (\mathbf{x} \wedge \sigma \mathbf{x})^2\} = (\text{inv}_1 \sigma) \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{x} - (\sigma \mathbf{x})^2.$$

3. Infine, omettendo molti altri risultati che si possono ottenere con egual facilità, e sempre in modo assoluto, vediamo come possa esprimersi in funzione di un vettore arbitrario  $\mathbf{x}$ , purchè unitario e normale ad  $\mathbf{N}$ , l'ordinario  $\Delta_2 \varphi$ , cioè la  $\text{div grad } \varphi$ . Si ha

$$(9) \quad \text{div grad } \varphi = \left\{ \frac{d \text{ grad } \varphi}{dP} \mathbf{x} \right\} \times \mathbf{x} + \left\{ \frac{d \text{ grad } \varphi}{dP} (\mathbf{N} \wedge \mathbf{x}) \right\} \times \mathbf{N} \wedge \mathbf{x} \quad (2).$$

(1) Dalla seconda forma (III) si ha subito  $\mathfrak{C}_{\mathbf{N} \wedge \mathbf{x}} = -\mathfrak{C}_{\mathbf{x}}$ .

(2) Cfr. Cesàro, *Geometria intrinseca* e C. Burali-Forti, *Formule di Frenet* (n. 5), Atti Acc. Torino (1902). La seconda forma invariantiva

$$\left\{ \frac{d \text{ grad } \varphi}{dP} (\mathbf{N} \wedge \mathbf{x}) \right\} \times \mathbf{x} - \left\{ \frac{d \text{ grad } \varphi}{dP} \mathbf{x} \right\} \times \mathbf{N} \wedge \mathbf{x}$$

risulta subito nulla applicando ( $\beta$ ) al primo termine.

Posto  $\lambda = \frac{d \text{ grad } \varphi}{dP}$ , e osservando che  $K\lambda = \lambda$  perchè  $\text{rot grad } \varphi = 0$ , si ha da ( $\beta$ ),

$$\begin{aligned} \lambda(N \wedge x) \times N \wedge x &= \{(\text{inv}_1 \lambda) N \wedge x - N \wedge \lambda x + x \wedge \lambda N\} \times N \wedge x = \\ &= \text{inv}_1 \lambda - (\lambda x) \times x - N \wedge \lambda N; \end{aligned}$$

ma  $\text{inv}_1 \lambda$  vale la  $\text{div grad } \varphi$ ; inoltre se  $y$  è vettore normale ad  $N$  e si applica la prima ( $\gamma$ ) alla identità  $y \times N = 0$ , ponendo  $w = N$ , si trova subito  $N \times K \frac{dy}{dP} N = 0$ ; la (9) è dunque dimostrata.

### Fisica. — *Pressione e conducibilità elettrica dell'atmosfera.*

Nota di LAVORO AMADUZZI, presentata dal Socio A. RIGHI.

È noto come vari argomenti inducano a pensare che per gran parte la conducibilità elettrica dell'atmosfera sia dovuta a ionizzazione determinata da materiale radioattivo che nell'atmosfera medesima si diffonde dal suolo. Le prime misure di Elster e Geitel sull'aria delle cantine e delle grotte sono state appoggiate da altre numerose che sarebbe superfluo qui enumerare. Va tenuto presente, è vero, qualche caso di eccezione pel quale la conducibilità elettrica dell'aria di sotterranei invece che maggiore di quella dell'aria libera è minore; ma si tratta di eccezioni che, come si suol dire, confermano la regola.

Sono ben note anche le considerazioni dell' Ebert in rapporto all' influenza che sulle variazioni di pressione atmosferica dovrebbe avere il riversarsi nell'aria del materiale proveniente dal suolo. Sotto l' influenza di basse pressioni barometriche l'aria contenuta nei condotti capillari del terreno, riversandosi nell'atmosfera, ne aumenterebbe il tenore in emanazione, mentre per alte pressioni quest'aria sarebbe invece di nuovo spinta entro il terreno stesso a raccogliere nuovo materiale radioattivo: in corrispondenza dei massimi di pressione atmosferica si dovrebbe avere basso valore per la ionizzazione dell'atmosfera, ed in corrispondenza dei minimi invece alto valore per la ionizzazione. P. Zölss <sup>(1)</sup> a Kremsmünster ha difatti veduto che la conducibilità elettrica dell'aria al fondo di un pozzo di 60 metri di profondità segue esattamente le oscillazioni della pressione atmosferica; ma non si mostra molto soddisfatto, in quanto alcune volte si hanno dei risultati in contraddizione colle vedute di Ebert.

È evidente, che se una relazione esiste, come pare probabile, fra pressione e dispersione atmosferica, per quanto mascherata dall'azione di molti

<sup>(1)</sup> Phys. Zeits., 6, pag. 129, 1905.

altri elementi, essa deve apparire per eccellenza manifesta in quelle regioni di copiose emanazioni gassose per le quali è accentuata da un lato l'azione del suolo sull'atmosfera e dall'altro l'influenza della pressione atmosferica.

Alcune osservazioni preliminari, convalidate poi da misure che formeranno oggetto di altra Nota, mi avevano dimostrato che i gas naturali che sfuggono dal terreno in certe plaghe dell'Appennino porrettano sono dotati di radioattività, e la conoscenza discretamente buona da me posseduta di quei luoghi mi assicurava che scaturigini dalle quali vengono mandati prodotti gassosi direttamente nell'aria, esistono in grande numero.

Mi parve perciò opportuno approfittare del periodo di vacanze estive per fare qualche misura di dispersione elettrica correlativa a misure di pressione atmosferica proprio in quei luoghi <sup>(1)</sup> dove maggiormente l'aria potesse ricevere nel proprio seno i materiali radioattivi provenienti coi gas naturali dal suolo.

Le misure di dispersione venivano fatte mediante un elettroscopio Elster e Geitel <sup>(2)</sup>, che caricavo mediante una pila secca Zamboni, e pel quale debbo esser grato alla cortesia del ch. prof. M. Raina, direttore del R. Osservatorio di Bologna. Le misure di pressione si eseguivano con un barometro metallico assai sensibile, come ebbero campo di mostrarmi saggi di confronto eseguiti in questo Istituto fisico. Alle misure simultanee di pressione e di dispersione venivano associate misure di umidità relativa e di temperatura per rendere meglio confrontabili i due primi elementi e per avere dal valore della umidità o della temperatura (che influiscono come è noto sulla conducibilità atmosferica) ragioni delle possibili divergenze da una eventuale legge di dipendenza fra pressione e dispersione.

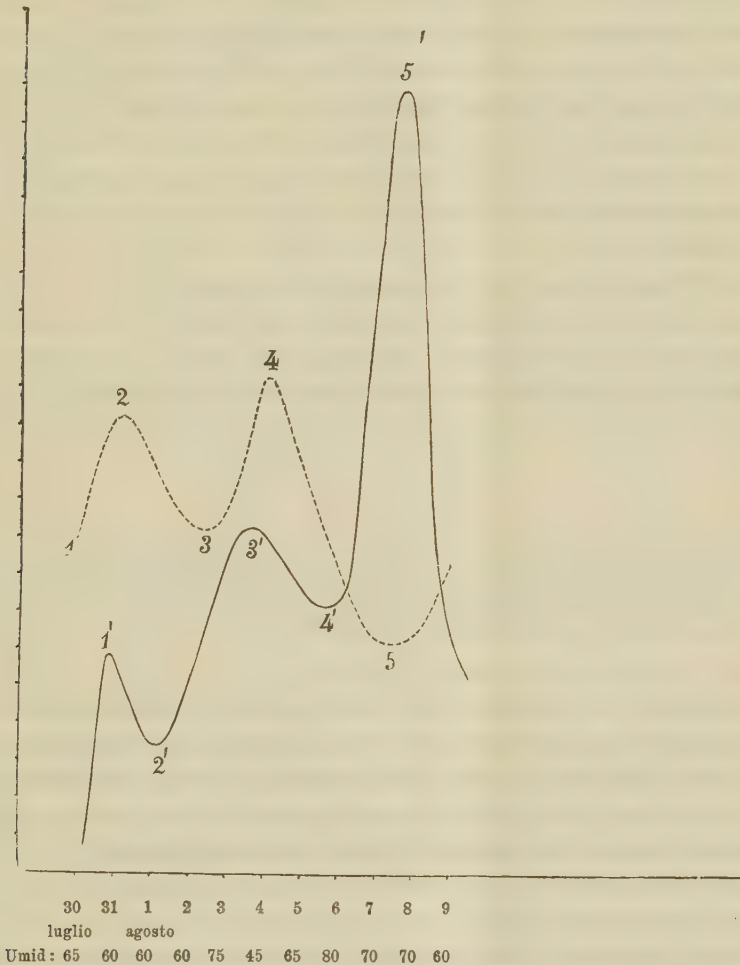
Non sto qui a riportare tabelle: traccio solamente un tratto della curva di dispersione (a linea continua) ed un tratto corrispondente della curva della pressione. Essi si riferiscono ad un periodo che va dal 30 luglio al 9 agosto, e sono sufficientemente eloquenti. Le misure fatte dal 9 agosto ai primi di ottobre, salvo periodi di perturbazioni, confermano quanto i tratti di curva riportati dicono e quanto segue:

a) La dispersione elettrica dell'atmosfera sente l'influenza delle variazioni di pressione atmosferica, ma con un qualche ritardo, per modo che i massimi ed i minimi di conducibilità si hanno parecchie ore dopo i minimi ed i massimi di pressione, senza però che si manifesti un vero e proprio parallelismo fra l'andamento di questi due elementi. Meglio si potrebbe dire che a qualche ora di distanza i massimi ed i minimi di pressione richiamano rispettivamente i minimi ed i massimi di conducibilità. Nella figura la corrispondenza è indicata con numeri semplici ed accentati.

<sup>(1)</sup> A Gaggio Montano, località detta Saldine.

<sup>(2)</sup> Phys. Zeits., t. I, 1899, pag. 11.

b) Tanto è manifesta l'influenza della pressione, che spesso volte la precedenza di forti abbassamenti barometrici a condizioni di accentuata umidità relativa permetteva che, nonostante queste condizioni di umidità, si potesse apprezzare una buona conducibilità elettrica dell'aria.



c) Spesse volte l'azione di un forte vento spirato per più ore ha distrutto l'effetto di un precedente minimo barometrico, in quanto a determinare un massimo di conducibilità.

3. Nelle poche parole d'introduzione a questa Nota ho accennato a casi di eccezione per ciò che concerne il comportarsi dell'aria di sotterranei sotto il punto di vista della conducibilità elettrica. Si sa difatti che ordinariamente l'aria delle cantine e delle grotte ha una conducibilità molto maggiore di quella esterna; ma in certi casi succede l'opposto, e ciò, si pensa,

per una certa impermeabilità delle pareti. Un comportamento di questo genere fu anche di recente additato dal Trabacchi (<sup>1</sup>). Quantunque ovvia e plausibilissima la spiegazione data dei casi d'eccezione ora ricordati, volli a titolo di curiosità fare qualche misura comparativa fra la conducibilità esterna e quella di cavità, scegliendo due casi, l'uno di cavità a parete permeabile e l'altro di cavità a parete impermeabile. Per il primo caso osservai maggiore conducibilità nell'interno del sotterraneo che all'esterno; ma il rapporto dei due valori risultò di un ordine di grandezza minore assai di quello che altri, sebbene con risultati vari, hanno trovato in casi consimili. E mi pare che la ragione stia in ciò: che, sebbene il sotterraneo fosse scavato nel terreno stesso dove, all'esterno, facevo le abituali misure delle quali ho più sopra brevemente riferito, era però privo della risorsa di sensibili emanazioni gassose dirette.

Per il secondo caso ebbi la opportunità di potermi valere di un pozzo discretamente profondo, praticato, per la discesa dei pesi di un antico orologio comunale, in un masso di serpentino. Il rapporto del valore della conducibilità per l'aria interna e quello per l'aria esterna risultò in media come 1 a 15.

*Ottica fisiologica. — Alcuni nuovi fatti sulla visione degli occhi astigmatici e normali, e loro interpretazione* (<sup>2</sup>). Nota del dott. M. LA ROSA, presentata dal corrispondente D. MACALUSO.

Osservando una montagna o un altro oggetto di grandi dimensioni sufficientemente lontano, ed inclinando lateralmente la testa in modo da portare le due visuali all'incirca in un piano verticale, si nota un cambiamento sensibile delle dimensioni e della distanza apparenti dell'oggetto osservato. Ciò ho verificato sempre ed in modo evidente, sperimentando su me stesso e ricorrendo all'osservazione di un centinaio di persone in maggior parte dotate di vista eccellente.

L'effetto riesce meglio apprezzabile, se da un'aperta pianura si guarda una montagna non molto distante, perchè vi si possano distinguere numerosi particolari. La grandezza dei mutamenti osservati varia da persona a persona, ma il loro senso, salvo rarissime eccezioni, rimane costante, e precisamente guardando con la testa inclinata nel modo precedentemente detto, l'oggetto osservato appare più basso, dilatato secondo l'orizzontale normale alla visuale e più lontano. Però il mutamento apparente della distanza è sempre più notevole di quello delle dimensioni.

(<sup>1</sup>) R. Accademia dei Lincei, 1° sem., 1908, pag. 160.

(<sup>2</sup>) Istituto Fisico della R. Università di Palermo.

Ripetendo la prova con oggetti vicini, si osservano solo i mutamenti apparenti delle dimensioni, come ho accertato per mezzo di uno schermo bianco di forma quadrata su cui era segnata una croce a braccia uguali, e posto ben simmetrico rispetto all'osservatore. Le braccia verticali, venivano giudicate più lunghe delle orizzontali, quando l'osservatore teneva la testa in posizione naturale, salvo poche eccezioni (cinque o sei sopra un centinaio); il contrario avveniva quando l'osservatore teneva la testa inclinata nel modo già detto. Tali mutamenti divenivano sempre meno apprezzabili quando la distanza fra l'osservatore e lo schermo veniva sempre più diminuita.

I fatti restavano gli stessi, osservando con ciascun occhio separatamente.

Si presenta immediata l'idea di attribuire questi mutamenti all'astigmatismo da cui sempre, o quasi, l'occhio umano è affetto; sebbene, per lo più, in grado debole abbastanza per non produrre disturbi notevoli nella visione.

In accordo con quest'ipotesi ho potuto riconoscere che i mutamenti apprezzati da occhi normali sono certamente meno spiccati di quelli apprezzati da occhi fortemente astigmatici, e che per questi l'entità dei mutamenti (almeno di quello relativo alla distanza) diminuisce quando se ne corregga, con le opportune lenti cilindriche, approssimativamente il difetto.

Mi propongo, pertanto, di esaminare fino a qual punto e con quali limitazioni, i fatti riferiti possono trovare una spiegazione sufficiente in questa ipotesi. Tale esame presenta un certo interesse principalmente pel complesso problema della visione negli occhi astigmatici, ed è appunto perciò che mi sono deciso a riferire i fatti osservati e le considerazioni che mi hanno suggerito.

Come è noto, l'astigmatismo dell'occhio umano dipende, in generale, dalla forma della cornea, che si accosta a quella di un ellissoide a tre assi (astigm. regolare), con l'asse maggiore coincidente col diametro antero-posteriore, e con i meridiani di massima e di minima curvatura rispettivamente verticale e orizzontale. A causa di questo astigmatismo un fascio di raggi omocentrico che colpisce l'occhio non resta più tale dopo la rifrazione, ma assume la nota forma del conoide di Sturm, che ha come sezione normale un'ellisse, la quale può ridursi ad un cerchio, ovvero ad un segmento di retta. Quest'ultimo caso avviene per due particolari posizioni del piano secante, fra le quali è compresa quella che dà luogo al cerchio.

I due segmenti giacciono rispettivamente nei piani principali dell'ellissoide. Essi rappresentano le sezioni di massima convergenza del fascio e portano il nome di rette focali; il più vicino alla superficie è più corto e giace nel meridiano di minima curvatura.

Fra il cerchio e ciascuna retta focale, le sezioni ellittiche hanno sempre il grand'asse nella direzione di questa; perciò sezioni ellittiche che si

trovano da bande opposte del cerchio hanno i grand'assi normali fra loro.

Ogni punto luminoso può dunque avere come coniugato sulla retina, o un'ellisse, con l'asse maggiore giacente nell'uno o nell'altro dei meridiani principali, o un cerchio, ovvero l'una o l'altra delle rette focali; fra queste sezioni l'occhio in virtù dell'accomodazione potrebbe scegliere la più conveniente. Ora alcuni ritengono (Fick, Helmholtz, Javal) che l'occhio preferisca accomodare sempre per una delle due rette focali, e veramente per la verticale; altri che esso caso per caso scelga fra l'una e l'altra di esse, e vi è infine chi crede (p. es. Hess) che l'occhio debba preferire l'accomodazione per il cerchio.

I mutamenti delle dimensioni apparenti, osservati nelle condizioni precedentemente riferite, si possono facilmente spiegare (almeno, dal punto di vista qualitativo) col primo modo di vedere, o quanto meno ammettendo che l'occhio accomodi per una sezione prossima ad una retta focale (sempre la stessa). Infatti l'immagine retinica di un oggetto qualsiasi, sarà in quest'ipotesi deformata in modo da presentare un allungamento diverso nelle diverse direzioni; massimo secondo uno dei due piani principali, nullo secondo l'altro. La deformazione della figura si potrà nettamente apprezzare, se la si fa girare di  $90^\circ$  nel suo piano; ovvero se si gira l'occhio di un angolo uguale.

Quanto al mutamento della distanza apparente dobbiamo rilevare che non è possibile far dipendere questo effetto completamente della variazione delle dimensioni, e veramente dell'altezza; giacchè fra loro non sussiste la relazione di proporzionalità, che in tal caso sarebbe necessaria, essendo — come fu detto — il mutamento della distanza più notevole di quello delle dimensioni se l'oggetto è lontano, ed inapprezzabile se l'oggetto è vicino.

Si potrebbe piuttosto pensare che l'apparente mutamento della distanza sia dovuto all'insolita orientazione dell'osservatore o del suo occhio; cioè ad un effetto in qualche modo analogo a quello che ci fa apparire all'orizzonte la luna ed il sole come più grandi che al meridiano, e la volta celeste più lontana all'orizzonte che allo zenit.

Però, pur non escludendo del tutto una tale influenza, è certo che l'astigmatismo interviene per una parte notevole nell'effetto in parola, giacchè questo viene indubbiamente diminuito dalla correzione approssimativa di quel difetto, quando non è piccolo.

Volendo renderci conto di quest'altro effetto prodotto dall'astigmatismo, facciamo notare che se si osservano attentamente i particolari della figura, si riconosce che la nettezza delle immagini ottenute nelle due diverse posizioni della testa è diversa; e precisamente quando questa è in posizione naturale l'immagine è sempre più netta ed i particolari più decisi che nell'altro caso.

Questa differenza di nettezza può bene darci ragione dei mutamenti apparenti della distanza; giacchè la nettezza delle immagini degli oggetti lontani è, come si sa, un elemento importante nel giudizio della distanza (fenomeno della *prospettiva aerea*). Siamo così ridotti a cercare le cause, legate all'astigmatismo, che producono tale differenza di nettezza.

Chi accomoda per una determinata retta focale, sempre la stessa (o per una sezione ad essa molto prossima) dev'essere abituato a dare importanza, nei giudizi che si connettono con la sensazione visiva, ai particolari rettilinei orientati secondo questa retta, perchè son quelli più nettamente apprezzati, cioè ai particolari che *obbiettivamente* hanno una determinata orientazione; scambiando quindi le posizioni dei meridiani principali dell'occhio, l'immagine deve apparire meno netta e l'oggetto più lontano, perchè questi particolari passano dalla massima nettezza all'intorbidamento massimo.

E si può osservare che le deformazioni dei particolari sono più grandi di quelle dei contorni dell'intera figura; giacchè a tutti i segmenti di retta che hanno in questa una stessa orientazione, corrispondono immagini astigmatiche con la medesima deformazione assoluta, qualunque sia la loro lunghezza. Si conclude che il cambiamento di nettezza dell'immagine, prodotto dallo scambio delle posizioni dei meridiani principali dell'occhio, dev'essere più esagerato del cambiamento delle dimensioni apparenti; e quindi più esagerato di questo dev'essere quello della distanza dell'oggetto.

Che veramente, nelle condizioni da noi dette, debba avvenire un mutamento di nettezza dell'immagine, ho potuto mettere in evidenza, in modo obbiettivo, per mezzo di prove fotografiche astigmatiche.

Sono in fine riprodotte due di tali fotografie, ottenute antepoendo all'obbiettivo di una camera fotografica (distanza focale 12 cm.) una lente piano-cilindrica di 50 cm. di distanza focale: nella prima di esse l'asse della lente era orientato in modo da avere nette le verticali, nell'altra le orizzontali.

Un occhio che accomodi sempre in modo da vedere più nette, per es. le verticali, vedrà la prima più netta della seconda; e girando di 90° il piano delle figure osserverà per entrambe un mutamento di nettezza. Però l'intorbidamento della prima è più spiccato del miglioramento dell'altra; ciò si comprende bene: quella, infatti, contiene quei particolari rettilinei che l'occhio, nella visione ordinaria, suole meglio apprezzare e che apprezza male dopo la rotazione (per il cambiamento della loro orientazione); questa contiene bene a fuoco quei particolari che l'occhio suole male apprezzare, a cui perciò attribuisce scarso interesse.

Il guadagno che si ha mettendo bene a fuoco questi ultimi particolari, che nella visione ordinaria quasi sfuggono all'occhio, non compensa dunque la perdita prodotta dall'aver portato fuori fuoco i particolari a cui l'occhio è abituato; e perciò se nella figura sono egualmente netti i particolari nelle due direzioni, si avrà una diminuzione di chiarezza nell'immagine, quando

si giri di  $90^\circ$  la figura nel suo piano, ovvero si scambiano fra loro le posizioni dei meridiani principali dell'occhio.

Le considerazioni fin qui svolte, si appoggiano implicitamente su due ipotesi riguardo all'accomodazione degli occhi astigmatici; si suppone, cioè, non solo che l'occhio accomodi sempre per una stessa retta focale (o una sezione ad essa prossima), ma che l'occhio non *possa* accomodare altrimenti, anche quando venga mutata la sua orientazione; senza di che, in questo caso, accomodando per l'altra retta focale potrebbe ripristinare all'incirca le medesime condizioni di visione a cui è abituato nella sua posizione naturale.

Ciò avviene veramente, ed ognuno può convincersene osservando una serie di tratti rettilinei, sottiti, alternativamente bianchi e neri, o ancora meglio, dei punti neri segnati in linea retta a piccolissima distanza fra loro sopra un foglio bianco: essi riescono più distinti, e per ciò apprezzabili separatamente a maggior distanza dall'occhio, quando giacciono sopra uno dei due piani principali di questo; e se si gira di  $90^\circ$  la figura *non è possibile ripristinare le medesime condizioni di nettezza di prima*, anche quando il grado di astigmatismo è molto debole (quello comune dell'occhio normale), cioè anche quando la variazione dell'accomodazione a ciò necessaria è molto piccola. Il piano della migliore visione varia da persona a persona e nella stessa persona può variare (circostanza importante) anche colla distanza dell'oggetto osservato (<sup>1</sup>).

La deduzione è dunque conforme alla realtà dei fatti; ma rimane oscura la ragione che costringe l'occhio a non mutare il suo stato d'accomodazione, anche quando un tale mutamento sarebbe doppiamente vantaggioso, giacchè (come in alcuni casi avviene) il miglioramento della visione può corrispondere ad una diminuzione dello sforzo di accomodazione.

La spiegazione dei fatti riferiti, ricavata immediatamente dall'esistenza dell'astigmatismo, può lasciare dei dubbî per i seguenti fatti:

In certi casi i mutamenti di dimensione osservati sembrano troppo grandi perchè possano ascriversi solamente a piccole deformazioni astigmatiche dell'immagine.

Essi non sembrano abbastanza influenzati dalla correzione approssimativa dell'astigmatismo quando questo difetto è notevole.

E vi è di più. Dalla stessa spiegazione deriva come conseguenza necessaria, che l'allungamento massimo nell'immagine astigmatica di una figura, deve avvenire nella direzione della linea focale per cui l'occhio accomoda, e viceversa; e poichè, come abbiamo visto in principio, il massimo allungamento avviene per lo più per le linee verticali, l'occhio dovrebbe accomodare per la retta focale verticale, conformemente all'opinione di Helmholtz, Fick, Javal.

(<sup>1</sup>) Questo fatto richiama alla mente l'ipotesi di Sturm; quella di un intervento dell'astigmatismo come mezzo di accomodazione.

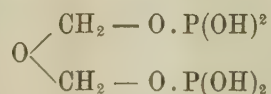


Risulta però da apposite osservazioni da me fatte, che questa conseguenza si trova in taluni casi in difetto. Tali eccezioni non solo non rientrano nella spiegazione avanti data, ma non sembrano facilmente spiegabili senza l'intervento di particolari ipotesi sullo schermo, su cui si formano le immagini, e però mi riservo di discuterle più ampiamente in una Nota successiva.

**Chimica.** — *Nuovo metodo di estrazione di un composto fosforato delle piante (Fitina) (¹).* Nota del dott. ANGELO CONTARDI, presentata dal Socio KÖRNER.

Il Pfeffer nell'anno 1872 intravvide nei globoidi inclusi nei granuli di aleurone un composto fosforato, che fu poscia isolato dal Palladin (²) dai semi di *Brassica nigra* e studiato in seguito dallo Schulze e dal Winterstein (³).

Il Winterstein (⁴) l'anno dopo dimostrò che tale composto, per azione dell'acido cloridrico ad elevata temperatura, si scinde in inosite ed acido fosforico e, dall'analisi, dedusse essere il composto null'altro che l'etere esa-fosforico dell'inosite. Il Posternak (⁵) qualche anno dopo, ripetendo le analisi dell'acido libero, trovava che esso era più ricco in acqua di quello che dovrebbe essere l'etere in questione; di più, determinandone la grandezza molecolare per mezzo dell'abbassamento del punto di congelamento delle soluzioni acquose, arrivava a pesi molecolari oscillanti tra il 171 ed il 185, e deduceva che la differenza tra la grandezza molecolare trovata e quella che in realtà dovrebbe essere secondo le sue ricerche, cioè di 238, era dovuta alla dissociazione dell'acido: dissociazione che si avvicinava assai a quella dell'acido fosforico, già determinata dal Raoult, epperò egli attribuiva all'acido in questione la formula bruta  $C_2H_8P_2O_9$  ed ammetteva poi come formula di struttura, la seguente:



Una ragione di grande importanza che indusse il Posternak ad assegnare all'acido la formula sopracitata, era la grande resistenza che offriva la fitina agli alcali di qualunque concentrazione a 100°, ciò che in generale non succede per gli esteri finora conosciuti.

(¹) Dal Laboratorio di Chimica organica della R. Scuola Sup. D'Agricoltura di Milano, Gennaio 1903.

(²) Zeitsch. f. Biolog., 1894, pag. 199.

(³) Zeitsch. f. Phys. Chem., 1896-97, pag. 90.

(⁴) Ber. d. Chem. Gesell., 1897, pag. 2299.

(⁵) Compt. Rend., 137, pagg. 202, 337, 439.

Dal modo di considerare il composto organico fosforato, secondo il Posternack derivava adunque che la trasformazione di esso in inosite, operata dagli acidi ad elevata temperatura, era da ritenersi un processo non di saponificazione solamente ma anche di sintesi.

Dopo del Posternak, altri si occuparono dell'argomento. Tutti però accettarono la ipotesi del Posternak stesso; solo nel 1907 Suzuki e Yoshimura <sup>(1)</sup> dimostrarono che nella pula del riso l'85 % del fosforo totale è dovuto alla fitina, ed insieme col Takaishi riuscirono a separare dalla pula stessa un enzima capace di scindere la fitina in acido fosforico ed inosite; fitase fu chiamato questo enzima.

Io ebbi dal prof. G. Körner l'incarico di studiare ancora il composto fosforato per vedere se fosse stato possibile chiarirne la costituzione.

Scelsi da principio varî materiali di partenza, i semi di *Heliantus*, i semi di alcune varietà di palme, i semi della quercia, ecc., allo scopo di vedere se alle volte queste piante contenessero composti fosforati aventi come nucleo preformato qualche zucchero analogo alla inosite, nel qual caso sarebbe dimostrato che per azione degli acidi a caldo dal composto fosforato si separa il nucleo preesistente.

Ma i tentativi rimasero, senza frutto, perchè da tutti questi semi si arrivò allo stesso composto, l'inosite, otticamente inattiva; come pure inettive si mostrarono sempre le soluzioni degli acidi fosforati organici.

Occorrendomi grande quantità di materiale, scelsi come prodotto di partenza la pula del riso che, come già dissi, da Suzuki era stata già impiegata; e trovai un metodo assai semplice per estrarre il principio fosforato. La pula del riso, finamente macinata, veniva trattata direttamente con due volte il suo peso di acido cloridrico diluito 0,2; 0,3 per cento), ed il liquido separato dalla poltiglia per torchiature, veniva riscaldato sotto la temperatura di ebollizione e neutralizzato con ossido di magnesio di recente calcinato. Un abbondante precipitato si deposita così al fondo; si decanta il liquido sovrastante, si lava parecchie volte con acqua calda per decantazione, si raccoglie il precipitato su filtro, si ridiscioglie in acido cloridrico a bagno maria e si filtra. Sul filtro rimangono buona parte delle sostanze che, solubili nell'acqua o nell'acido cloridrico freddo, precipitano per riscaldamento. Il liquido si scolora con nero animale, e si torna a neutralizzare con ossido di magnesio puro. Lentamente al fondo della capsula si deposita il composto fosforato cristallino bianco. Sottoposto all'analisi dopo seccato all'aria diede:

Umidità . . . . .	16,90 %
Ceneri . . . . .	71,7 %
Fosforo . . . . .	14,4 %

<sup>(1)</sup> *The bulletin of the College of Agriculture, Tokyo, Imperial University*, Vol. VII, n. 4, pag. 495 e seg.

Ridisciolto in acido cloridrico, ripetuta la precipitazione avendo cura di mantenere il liquido ancora un po' acido, si ebbe:

Umidità	12,5 %			
Ceneri	66,1 %			
Fosforo	21,8 %	Calcolato per sale doppio di calcio e magnesio	=	22,14 %
Calcio	13,8 %	" " "	=	14,29 %
Magnesio	8,97 %	" " "	=	8,57 %

Da due quintali di pula di riso si ebbero circa 10 chilogrammi di prodotto, rispondenti ai primi dati analitici.

Siccome poi il prodotto venne trasformato per la massima parte in inosite, non mi curai di purificarlo ulteriormente, sapendo che le impurezze in esso contenute (carbonato di magnesio) non mi potevano nuocere.

In un autoclave robusto di bronzo veniva introdotto un tubo di circa 500 cc. di capacità, e nel tubo venivano mescolati 300 cc. di acido solforico al 10 % e 100 grammi del prodotto più sopra descritto; indi chiuso, l'apparecchio veniva scaldato a 150°-180° per sedici ore. Reso debolmente alcalino il liquido con barite e filtrato dal precipitato ottenuto, lavato fin ad esaurimento ed eliminata la barite con anidride carbonica, il liquido rimanente, per evaporazione, dava circa 18 grammi di inosite che, ricristallizzata e decolorata con nero animale, fondeva, dopo essiccamento, a 221°.

Per accertarmi se gli alcali non avessero nessuna azione sul composto fosforato organico, scaldai nell'autoclave 100 grammi del prodotto con 100 grammi di barite e 300 centimetri cubici di acqua a 180°-200° per 24 ore <sup>(1)</sup>. Filtrai il liquido caldo e precipitai la barite in eccesso con anidride carbonica; la soluzione acquosa ottenuta, evaporata a secco, diede quattro grammi di inosite pressochè pura, fondente dopo due cristallizzazioni a 221°.

L'acqua da sola a temperatura superiore ai duecento gradi, agisce pure sopra il composto fosforato; ma la quantità di inosite che si separa è estremamente piccola.

Questo composto fosforato contenuto nelle piante si comporta dunque come un estere ordinario; solamente, gli alcali lo saponificano assai più difficilmente. Questo non ci deve far meraviglia se si pensa che nei mezzi alcalini esso è assai poco solubile, e quindi il tempo occorrente a saponificarlo deve essere assai grande.

Fino ad ora però non si può con certezza asserire che la formola del Posternak non sia la vera.

<sup>(1)</sup> Il lavoro era già stato fatto da parecchio tempo e mi accingevo a pubblicarlo, quando nel numero del dieci dicembre della Zeitschrift für Physiologische Chemie apparve una Memoria del Winterstein, dove appunto si dimostra che il composto fosforato contenuto nelle piante dalla barite e dalla soda è saponificato, e l'autore giunge a risultati perfettamente concordanti coi miei.

Sono in corso ancora esperimenti, dai quali mi riprometto la determinazione della grandezza molecolare impiegando i metodi ordinari, sperimentando sopra derivati che non siano dissociati in soluzione; e mi propongo di riferire in proposito.

**Mineralogia.** — *Sulla costituzione delle zeoliti.* Nota di FERUCCIO ZAMBONINI, presentata dal Socio G. STRÜVER.

Nelle Memorie di questa Accademia <sup>(1)</sup> ed in quelle della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli <sup>(2)</sup> ho esposto i risultati delle esperienze da me istituite sulle zeoliti. A queste mie ricerche il dott. Panichi <sup>(3)</sup> ha recentemente dedicato più di dodici pagine, movendo diversi appunti critici soprattutto alle conclusioni che io ho creduto di poter trarre dalle nostre attuali conoscenze sulle proprietà dell'acqua di questi minerali. Veramente, poichè il dott. Panichi ha dichiarato, in varî punti della sua Memoria, di avere intenzione di eseguire delle nuove esperienze in proposito ed anzi di averne già cominciate alcune, mi sarebbe sembrato più logico il rimandare l'esame critico dei miei lavori ad esperienze terminate, in modo da dare alle sue osservazioni un carattere meno soggettivo. Tuttavia, tralasciando quanto ha puro carattere di giudizio personale, reputo opportuno replicare subito, e con la maggior possibile brevità, allo scritto del Panichi, tanto più che spesso, come vedremo, il mio pensiero è stato da lui riprodotto in modo incompleto o addirittura inesatto.

Ed infatti, a pag. 21, il dott. Panichi asserisce che, secondo me, un punto di divergenza tra le zeoliti e le soluzioni solide « consiste in ciò: che, durante il riscaldamento, sogliono verificarsi delle fessurazioni, cioè variazioni brusche e non continue, nella compagine di una zeolite ». Questo ragionamento è di esclusiva proprietà del dott. Panichi, poichè non si trova in nessun punto dei miei lavori.

Le variazioni brusche e non continue delle quali io ho parlato e sulle quali ho insistito, sono quelle delle proprietà assorbenti delle zeoliti, mentre delle fessurazioni e di altro ho parlato (*Ricerche*, pag. 371) per fare una semplice constatazione di fatto contro un'affermazione in contrario di J. Traube.

Nella stessa pag. 21 il Panichi scrive: « Un'altra analogia fra alcuni idrati e la heulandite è stata riscontrata in ciò: che una prolungata per-

<sup>(1)</sup> *Ricerche su alcune zeoliti.* Memorie R. Accad. Lincei, 1905 (5<sup>a</sup>), V, 344; *Ulteriori ricerche sulle zeoliti.* Ibid., 1906 (5<sup>a</sup>), VI, 102.

<sup>(2)</sup> *Contributo allo studio dei silicati idrati.* Atti della R. Accad. delle Scienze fisiche e mat. di Napoli, 1908 (2<sup>a</sup>), XIV, n. 1.

<sup>(3)</sup> *Contributo allo studio fisico e chimico dei minerali che per riscaldamento sviluppano acqua.* Parte prima. Pubblicazioni del R. Ist. di studi sup. Firenze, 1908.

manenza ad una certa temperatura produce, tanto nella Heulandite, quanto in alcuni idrati, un considerevole rallentamento nel riassorbimento dell'acqua ». Il concetto espresso in questo periodo è mio solo in parte, perchè il dottor Panichi si è dimenticato di completarlo con quanto ho scritto a pag. 370 delle *Ricerche*: « Bisogna però notare che questo fenomeno avviene nel gesso riscaldato al disopra della temperatura di disidratazione, mentre nella heulandite si osserva quando ancora la disidratazione è soltanto parziale ». Nè mi pare che queste parole abbiano un'importanza secondaria!

A pag. 26, il dott. Panichi si occupa ampiamente di quanto io ho detto circa la teoria di Tschermak-Doelter sulla costituzione delle zeoliti, e dopo varie considerazioni conclude: « Ma neppure l'ipotesi della struttura micellare giova a spiegare l'esistenza di questa silice, esistenza di cui si può ben dubitare, ma di cui qui non interessa discutere. Si viene infatti così a passare dal concetto di un puro idrogelo a quello di una *combinazione di assorbimento* (Absorptionsverbindung); ma ciò non spiega nè come questa silice possa, caso per caso, soddisfare alle esigenze della formula chimica, nè se essa possa sussistere *perpetuamente* nelle micelle allo stato di *gel*, per produrre, come suppone Zambonini, i fenomeni di riassorbimento ».

Perchè il lettore possa giudicare dell'esattezza con la quale il Panichi riferisce e critica il mio pensiero, io mi limiterò semplicemente a riportare qui la conclusione della parte del mio lavoro (*Ulteriori ricerche*, pag. 121) dedicata alla teoria di Tschermak-Doelter: « Cosicchè viene resa verosimile la supposizione del Doelter, che io però ritengo accettabile solo con uso assai prudente e limitato, che, cioè, la proprietà delle zeoliti di lasciar libero passaggio all'acqua, sia dovuta alla silice legata al nucleo feldspatico. È, però, secondo me, indubbio che se questa silice « libera » veramente esiste, non deve avere la composizione di un acido silicico definito, ma una composizione, invece, del tutto variabile. Non è nemmeno da tacere che in molte zeoliti le analisi non danno silice « libera », e che, in altre, soltanto forzando i risultati delle analisi si può avere la composizione di un plagioclasio più silice ». Si direbbe che il dott. Panichi ha letto molto superficialmente il mio lavoro per attribuirmi una serie di idee tanto contrarie a quelle da me espresse!

Messe così a posto le cose, passiamo al punto essenziale della controversia. Come è noto, io, in base al complesso delle nostre conoscenze sulle zeoliti ed in base a non pochi e non trascurabili fatti da me osservati, sono giunto alla conclusione che le proprietà dell'acqua di questi minerali trovano una singolare somiglianza in quelle dell'acqua degli idrogeli, studiati così profondamente dal van Bemmelen. Per spiegare sia questa somiglianza che i fenomeni in se stessi, io ho emesso l'ipotesi che le zeoliti abbiano una struttura alveolare analoga a quella che il van Bemmelen ha ammesso nei suoi idrogeli, ed ho mostrato (*Contributo*, pag. 190 e seg.) che in base ad

una tale ipotesi è possibile darci ragione di tutto quel complesso di fatti che rendono così importanti le zeoliti. Per eliminare ogni possibilità di equivoco io ho insistito fino alla noia nel parlare di analogie, di somiglianze e limitate rigorosamente nel modo su indicato. Sicchè, il dott. Panichi si affatica inutilmente ad insistere su certe differenze ben note fra zeoliti ed idrogeli (anzi egli parla addirittura in molti punti di geli senz'altro, perdendo così il contatto con le mie considerazioni limitate ad un gruppo di questi composti), differenze che potrebbero servire contro di me soltanto se io, cosa che non sussiste affatto, avessi affermato che le zeoliti sono idrogeli, mentre ho scritto e ripeto che questi minerali contengono acqua assorbita in condizioni analoghe (badiamo bene, analoghe, non identiche) a quelle degli idrogeli studiati dal van Bemmelen.

Ma il dott. Panichi dubita anche dell'analogia di comportamento fra le zeoliti e gli idrogeli per quel che si riferisce all'acqua che contengono <sup>(1)</sup>, perchè alcune <sup>(2)</sup> delle proprietà comuni alle zeoliti ed agli idrogeli prese isolatamente non sono esclusive di queste sostanze (cosa questa, del resto, già da me notata e discussa), e perchè io non ho parlato di un preteso comportamento opposto fra zeoliti ed idrogeli che, secondo Tammann, si osserverebbe rispetto alla reversibilità del processo di disidratazione su  $H_2SO_4$  di varia concentrazione. La prima obiezione non ha, evidentemente, alcun valore: col ragionamento che fa Panichi si potrebbe benissimo concludere che un leone (per citare un animale meno velenoso e meno rapace dei serpenti e delle aquile da lui chiamati in campo) non è un leone, perchè ciascuno dei suoi caratteri distintivi, preso a sè, non è speciale a questo animale. Nè più forte è l'altra obiezione. Infatti, dal lavoro di Tammann, che, inoltre, non riporta dati numerici ed adopera anche il verbo « *scheinen* », risulta che la differenza di comportamento fra zeoliti ed idrogeli è solo *quantitativa*, mentre è chiaro che in una questione di pure analogie e somiglianze non può tenersi di mira che il comportamento *qualitativo*. E sotto questo punto di vista l'analogia tra zeoliti ed idrogeli è conservata, perchè in ambedue i casi la reversibilità è limitata.

Le mie *Ricerche* terminano con le seguenti parole: « ... non mi sembra soverchio ardimento insistere sulle notevoli somiglianze riscontrate tra le proprietà delle zeoliti e degli idrogeli, per quel che si riferisce all'acqua che contengono ». Dopo ciò, ognuno sarà in grado di giudicare con quale opportunità il Panichi, a proposito dei miei lavori, passi « ad esaminare ciò che sappiamo con sicurezza intorno al comportamento, non dell'acqua, ma dell'edificio che la emette o la assorbe », per giungere alla scoperta che è

<sup>(1)</sup> Il Panichi dice semplicemente « comportamento fra zeoliti e geli », ed ha, così, senza dubbio, il vantaggio di risparmiare alcune parole, ma non riproduce certo esattamente il mio pensiero.

<sup>(2)</sup> Egli, infatti, non cita tutte quelle ampiamente esposte nei miei tre lavori.

instabile il sostegno di un gelo e stabile quello di una zeolite. Ma, almeno, tutto quanto egli dice a pag. 25 ed al principio della pag. 26 fosse sempre esatto! Scrive Panichi: « Così pure i geli, per effetto del calore, riducono enormemente il proprio volume, mentre per le zeoliti si ha riduzione di volume sì, come Friedel ha dimostrato, ma una riduzione trascurabile in confronto a quella che subiscono i geli ». Anche se questa differenza, al solito di carattere puramente quantitativo, tra zeoliti ed idrogeli esistesse, io non so capire perchè dovrebbe portarci ad abbandonare l'ipotesi della struttura alveolare delle zeoliti, mentre basterebbe ammettere che in queste ultime gli alveoli sieno molto più piccoli che negli idrogeli, per spiegare la maggiore contrazione di questi per effetto del calore, e come il sostegno delle zeoliti non sia deformabile come quello dei geli. In linea di fatto è da osservarsi, poi, che se confrontiamo, come vuole Panichi, i *sostegni* delle zeoliti e dei geli e ci riferiamo, perciò, ai sostegni stessi disidratati, noi vediamo che secondo il van Bemmelen <sup>(1)</sup> il rapporto tra il peso specifico di un idrogelo arroventato e quello del gelo stesso disidratato è 2,28 : 1, mentre dai dati di Friedel risulta che nell'analcime questo rapporto è 1,14 : 1, e che lo stesso van Bemmelen (loc. cit., pag. 271) parlando del gelo n. 106 dice che in seguito al riscaldamento per ore 2  $\frac{1}{2}$  al rosso scuro e per ore 1  $\frac{1}{2}$  al rosso, la contrazione era « noch gering » e che appariva « sehr deutlich » dopo tre ore di arroventamento nel forno Hempel. Dopo ciò, non mi pare che, almeno in tesi generale, si possa dire che la contrazione delle zeoliti sia *trascurabile* di fronte a quella *enorme* dei geli!

Ma Panichi prosegue (pag. 26): « Così pure il rapporto fra la massa del sostegno e la massa dell'acqua che esso può contenere è sempre piccolissimo in un gelo; è invece grande, anzi sempre maggiore dell'unità, in una zeolite. Inoltre il valore di questo rapporto è grandemente variabile in un gelo ed è invece costante (salvo le piccole oscillazioni dovute all'ambiente) nelle zeoliti ». La prima affermazione è smentita dai fatti, poichè il van Bemmelen ha avuto occasione di studiare parecchi idrogeli silicei nei quali il tenore in acqua è perfino minore di quello presentato da molte zeoliti <sup>(2)</sup>. Quanto all'altra affermazione del Panichi, che in un gelo il valore del rapporto  $\frac{\text{massa del sostegno}}{\text{massa dell'acqua}}$  è grandemente variabile, io non posso non osservare che ciò accade quando un dato gelo viene formato in diverse condizioni. Ma non è a questo modo, evidentemente, che si possono paragonare le zeoliti, ciascuna delle quali ha un determinato campo di stabilità, con gli idrogeli. Anche in questi bisogna vedere che cosa accade quando la loro formazione avviene sempre in condizioni identiche o poco mutevoli. Ed allora noi ve-

<sup>(1)</sup> Zeitsch. f. anorg. Chemie, 1902, XXX, 270.

<sup>(2)</sup> Io stesso, nelle *Ulteriori ricerche*, ho esaminato uno di tali idrogeli.

diamo che le esperienze di Tschermak ed allievi ci mostrano che, nelle stesse o in poco diverse condizioni si ottengono idrogeli silicei nei quali la quantità d'acqua è certamente più costante di quel che si osserva nella maggior parte delle zeoliti, per alcune delle quali analisi accurate dànno delle oscillazioni che possono salire fino al 6 % e che, certo non possono imputarsi alle piccole variazioni dello stato igrometrico nei nostri laboratori, poichè Goldschmidt e Hermann<sup>(1)</sup> hanno constatato differenze perfino del 3 % nei cristalli di una stessa zeolite (di diversa provenienza) analizzati nello stesso ambiente.

Del resto, anche Panichi<sup>(2)</sup> nel 1906 parlava della *variabilità* del tenore d'acqua nelle zeoliti, che serviva, allora, a spiegare delle contraddizioni tra i fatti e certe sue vedute teoriche: oggi, naturalmente, per comodità di polemica, la variabilità diventa « piccole oscillazioni dovute all'ambiente » (!).

Poichè era presumibile che si sarebbe obbietato, contro l'analogia da me sostenuta nella struttura e nelle proprietà dell'acqua, che le zeoliti sono cristallizzate e gli idrogeli amorfi, io insistei sul fatto, di evidente importanza, che degli studiosi di non disprezzabile valore ritengono che tra colloidali e cristalloidi esistano gradi di passaggio, e perfino che i colloidali stessi sieno cristallini (Veimarn). E l'esistenza di questo indirizzo di studi il Panichi non può certo illudersi di negarla cercando delle inesattezze in un lavoro di *uno* degli scienziati da me citati, o riproducendo ironicamente le parole nelle quali io ho sintetizzato l'impressione in me prodotta dalla lettura di una Memoria di P. v. Veimarn, che, sia detto incidentalmente, il Panichi non ha probabilmente nemmeno letta nell'originale. Nè io so capire, passando al lato serio della questione, perchè la struttura alveolare dovrebbe essere in contrasto assoluto col fatto che le zeoliti sono cristallizzate. Ammettendo, infatti, la teoria di Sohncke sulla struttura delle sostanze cristalline, perchè non potrebbe nelle zeoliti ciascuno dei punti di Sohncke essere costituito da una micella?

Ed ho finito<sup>(3)</sup>. Da quanto ho detto, spero emerga chiaramente che se io resto fermo nelle mie idee, non è già perchè io ad esse sia eccessivamente attaccato, ma perchè la critica non sempre esatta del dott. Panichi non è certo tale da intaccarle minimamente. Trovi il collega Panichi una spiegazione migliore della mia delle proprietà tanto interessanti dell'acqua delle zeoliti o la dimostri insostenibile, ed io sarò il primo a congratularmi con lui e a pugnarne le idee.

(1) Neues Jahrb. f. Min. Geol. u. s. w. 1906, I, 20.

(2) Memorie R. Accad. Lincei, 1906 (5\*), V, 51.

(3) L'esame ultramicroscopico fatto da Panichi su *una* lamina di heulandite e che non avrebbe permesso di scorgere in questa i fenomeni che si osservano nei colloidali, non ha, almeno per il momento, molto valore, perchè, come ho già detto, nelle zeoliti la struttura alveolare, se esiste, deve essere molto più minuta che negli idrogeli.

**Geologia.** — *Fenomeni di erosione accelerata nel pliocene di val Tronto.* Nota del prof. R. ALMAGIÀ, presentata dal Socio G. DALLA VEDOVA.

La regione presa in esame in questa Nota è compresa propriamente fra il Tronto inferiore e il Tesino e può delimitarsi con una linea, che, par-

Vetta principale    Rupe di  
1103 m.            S. Polesia.



Valle  
del Chiaro  
morta con  
Calanchi.

Fig. 1. — Il Monte dell'Ascensione. Fotografia dell'A. presa dalla mulattiera Ascoli-Porchiano sotto sotto il Colle Guagliano a 445 m. di altezza; obiettivo a Nord. (Le diverse punte del Monte corrispondono alle testate degli strati di sabbia più resistenti, i quali si immergono in direzione N-E; 29 luglio 1908).

tendo dalla vetta del M. dell'Ascensione (1103 m.), segue il fosso di Polesia, che nasce dal fianco meridionale del monte, poscia il Chiaro e il Tronto fino al confluente col torrente Lama, indi risale quest'ultimo e il suo affluente Lama Tosa fino alla sorgente; di qua raggiunge direttamente il Tesino al confluente col Fosso Caico, segue il Tesino e da ultimo il Torbidello, che nasce dal fianco NE del M. dell'Ascensione <sup>(1)</sup>.

Dalla sommità di questo monte, il cui dorso si protende a nord col M. del Cerro (763 m.) e a sud coi colli di Polesia e Montadamo, la regione

<sup>(1)</sup> Cfr. i quadranti 133 I (S. Benedetto) e 133 IV (Ascoli) della carta topografica d'Italia.

declina lentamente ad est verso il mare, ma presenta contemporaneamente una pendenza anche più accentuata verso sud, cioè verso il Tronto, il cui alveo è a circa 103 m. sul livello marino al confluyente col Chiaro e a poco più di 45 m. al confluyente col fosso Lama. Al Tronto vanno la maggior parte delle acque, mediante parecchi torrenti (Chiaro, Bretta, Chifente, Lama...) che corrono in valli profonde, ma larghe, e coi loro numerosissimi affluenti e subaffluenti hanno inciso complicatamente e bizzarramente tutta la plaga, la quale appare oggi oltremodo accidentata. I terreni che la costituiscono — se si prescinda da un distretto ad arenarie mioceniche in val Chiaro e sulla

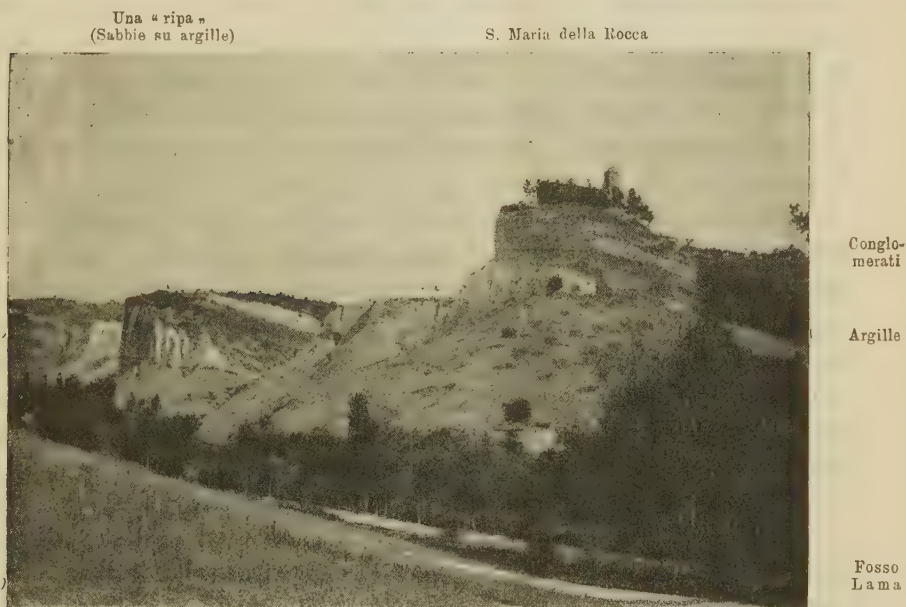


FIG. 2. — S. Maria della Rocca a Offida, e le ripe sulla sinistra del Fosso Lama. (Fotografia dell'A. presa dalla testata destra del ponte sul fosso Lama; 28 luglio 1908).

sinistra del Tronto a NE di Ascoli — appartengono al pliocene, solo qua e là ricoperto da scarsi e limitati lembi di quaternario antico. Il pliocene è rappresentato oggi principalmente dalle notissime argille turchinice; esse un tempo dovevano in buona parte esser ricoperte da una formazione costituita da sabbie gialle alternate o cementate con conglomerati e anche con arenarie; ma ora questa formazione non si conserva che nelle zone più elevate, dove è potuta sfuggire ai processi erosivi, che nel fondo e sui fianchi delle vallate l'hanno ovunque asportata, mettendo a nudo le argille; abbastanza frequente è peraltro anche l'intercalazione di banchi più o meno potenti di argilla con strati, di solito sottili, di sabbie o conglomerati.

Tutte queste rocce sono straordinariamente accessibili ai processi del disfacimento meteorico e dell'erosione, i quali perciò vi si esplicano in una

forma accelerata e talora catastrofica, conferendo alla regione un aspetto morfologicamente caratteristico. Nell'intento di accennare brevemente a tali fenomeni di erosione accelerata, distingueremo quelli che si verificano nella formazione prevalentemente sabbiosa, là dove essa riposa sulle argille; quelli, un po' diversi, che avvengono là dove le due formazioni si intercalano; e quelli infine che hanno luogo nelle argille stesse.

I. Le aree dove la formazione a sabbie si mantiene ancora sopra quella delle argille sono quasi sempre limitate esternamente da pareti a picco, alte talora più decine di metri, che contrastano singolarmente coi declivi più dolci della sottostante formazione argillosa. Le forme in tal modo generate sono dette localmente *ripe* e ne sono esempli tipici la rupe di S. Maria della Rocca presso Offida, e, alquanto più a monte, quelle sulla sinistra del fosso Lama, la ripa sulla sinistra della strada Offida-Castignano a SE del Colle Acuto e quella, veramente imponente, che limita a sud l'altura di Castignano.

Tali ripe sabbiose retrocedono continuamente, perchè le argille, che ne formano l'imbasamento, vengono assai facilmente dilavate e asportate in superficie dalle acque meteoriche, sì che le sabbie sovrastanti, prive di sostegno al piede, crollano a pezzi o a fette: così la sorte della rupe su cui sorge la su ricordata chiesa di S. Maria ad Offida sembra assolutamente segnata, nonostante i poco felici tentativi di consolidamento con mura di sostegno. Questi crolli sul fronte delle ripe, possono anche in certi casi e per circostanze speciali assumere proporzioni ingenti, come dicesi sia più volte avvenuto nella ripa di Castignano, dove franamenti improvvisi avrebbero già nel 1204, poi nel 1335, nel 1574 e altre volte ancora, distrutto parte del paese; ma di solito il processo si esplica lentamente, con crolli limitati e parziali, ma continui, agevolati spesso da una tendenza alla decomposizione in prismi dei banchi sabbiosi, per la formazione di fessure verticali, come si osserva sulla sinistra del fosso Lama a monte di Offida: uno stadio più avanzato di tale decomposizione può anche isolare dei prismi di sabbie che presto si convertono in piramidi (quali si veggono in piccolo presso Porchiano) e poi in tempo relativamente breve vanno distrutte per la poca resistenza del materiale di cui constano.

I piccoli corsi d'acqua, che di solito lambiscono l'imbasamento delle ripe, asportano rapidamente i prodotti del loro sbocconcellamento e quelli del dilavamento nelle argille, sì che l'arretramento delle ripe stesse continua senza posa finchè tutta la placca sabbiosa sia consumata: in tal modo venne evidentemente ad essere scoperciata e messa interamente a nudo, in molte parti di questa regione, anche nelle zone elevate, e in taluni dossi e cocuzoli, la soggiacente formazione argillosa.

II. Dove le due formazioni, la sabbioso-conglomeratica e l'argillosa, appaiono intercalate, si generano sovente fenomeni assai analoghi a quelli ca-

ratteristici delle *balze* di Volterra, tanto spesso descritti e ormai ben noti (<sup>1</sup>). Non molto dissimili da quelle dell'antica città toscana sono ad es. le condizioni del paese di Offida. Sorge esso su un dorso alto circa 300 m. tra il fosso di Fonte Pola a SE e un anonimo fossatello a NW, ambedue affluenti del fosso Lama, che a sua volta scorre lungo il lato SW, dove il dorso termina con lo sprone di S. Maria della Rocca. Uno strato superiore, quasi orizzontale (inclinazione 7°-8°) di sabbie un po' argillose, cosparse di ciottoli piccoli e smussati, localmente passante a conglomerato, riposa su banchi di argille a lor volta sabbiose e alternate con sottili straterelli di sabbie. Le acque piovane e quelle di scolo del paese, dopo essersi infiltrate attraverso lo strato superiore permeabile, corrono lungo la superficie di contatto con le argille e affiorano poi all'esterno in stillicidi, favorendo il parziale dilavamento delle argille impure, che si modellano in quelle bizzarre forme di erosione, in quelle forre scoscese ed orride, che, maggiormente estese ed imponenti, han reso tristamente celebre Volterra. Anche ad Offida la *balza* retrocede continuamente, specialmente sul versante SE, dove sono case proprio sull'orlo del precipizio, destinate a crollare forse entro breve tempo, mentre sul versante NW, assai meno ripido, e ancora in parte ricoperto di vegetazione, la minaccia è più lontana.

Fenomeni consimili si osservan anche sul versante meridionale e orientale del M. dell'Ascensione; quivi sembra anzi che si verifichino talora anche franamenti grandiosi, come accadde nel maggio del 1882, in cui scoscese un grande ammasso di materiale sabbioso e argilloso, che andò a colmare una profonda vallecola incisa nel fianco del monte.

III. Ma nella maggior parte della regione qui considerata affiorano oggi in superficie, come già si disse, le notissime argille turchinice, più o meno pure, in banchi di grande potenza, e in seno ad esse i numerosi corsi d'acqua già ricordati hanno inciso vallate assai profonde e che vanno sempre più approfondendosi per la rapidità con cui si esplica, in una roccia così poco resistente, il processo dell'erosione verticale. Non meno rapida è peraltro l'erosione laterale. Sui fianchi argillosi, piuttosto ripidi, delle vallate maggiori, i piccoli smottamenti sono continui nelle stagioni piovose: negli incavi da essi formati prendono a scorrere le acque meteoriche, che presto li allargano e li approfondiscono; e così, in progresso di tempo, col ripetersi successivo e complicato degli stessi fenomeni, si formano quei caratteristici fasci di burroncelli, separati da sottili ed acute creste, solcati da microscopici corsi d'acqua, i quali, indicati qui con l'appellativo di *coste* o *canali*, somigliano tanto ai notissimi calanchi del Bolognese, che possiamo anche chia-

(<sup>1</sup>) Cfr. specialmente Braun G., *Zur Morphologie des Volterrano*, in Zeitschr. der Gesellsch. für Erdk. zu Berlin, 1905, dicembre; e Martelli A., *Le balze di Volterra*, in Riv. Geogr. Ital., 1908, febbraio.

marli con quest' ultimo nome, ormai abbastanza entrato nell'uso dei geografi (1).

Origine del calanco può esser tanto il solco, dapprima lieve, formato dalle acque selvagge sulla pendice argillosa, che sarà man mano ampliato da piccoli smottamenti laterali, quanto viceversa la nicchia o incavo generato da uno smottamento, e che servirà di ricettacolo alle acque scolanti in superficie incaricate di approfondirlo: il processo, comunque iniziato, si continua poi naturalmente, accelerandosi e complicandosi sempre più, almeno fino ad un certo limite.

Ripaberarda

Fosso  
d'Ischia



FIG. 3. — Paesaggio a calanchi: Sul davanti i calanchi alla sinistra del Fosso d'Ischia (Bretta), poi la cresta che separa il Fosso d'Ischia dal Fosso della Ripa e i calanchi sulla sinistra di questo; in fondo Ripaberarda. (Fotografia dell'A.; dalla mulattiera Porchiano-Ischia, poco sotto il paese di Porchiano; 29 luglio 1908).

Esempî tipici di sistemi di calanchi si veggono lungo tutti i torrentelli che formano il Bretta (fosso di Porchiano, fosso d'Ischia, fosso della Ripa), inoltre lungo il torrente Chifente e alcuno dei suoi affluenti, come il rio Balcone; il paesaggio da essi generato è oltremodo bizzarro, quasi ruuiniforme. Accennerò che in tutti i corsi d'acqua testè ricordati si osserva che il processo di formazione dei calanchi si esplica in maniera più completa e con molto maggior intensità lungo la riva sinistra che non lungo la destra; il

(1) S'intende che il nome *calanco* è adoperato qui nel senso che esso ha nel Bolognese; poichè la stessa parola, nella forma femminile (calanca), si adopera anche comunemente nell'Italia meridionale, p. es. in Basilicata, ma con significato un po'diverso.

fatto singolare risulta evidente anche da un semplice esame della carta topografica, ma la ragione non è a me sufficientemente chiara.

I fianchi delle vallate, teatro al fenomeno dei calanchi, sono gli uni dagli altri separati da dorsali a inclinazione molto più mite, che fungono da spartiacque; anch'essi sono oggi assai spesso costituiti da sola argilla, perchè anche là dove essa era un tempo ricoperta e parzialmente protetta dalla formazione sabbioso-conglomeratica, questa è, come già fu spiegato, ormai di frequente scomparsa. In questi dossi argillosi, in causa soprattutto della lieve pendenza, i processi erosivi si esplicano non di rado nella forma di lenti scorrimenti superficiali sui due lati della linea spartiacque, scorrimenti che solo nella stagione piovosa sono abbastanza intensi da esser avvertiti per gli effetti esteriori immediati, ma di cui sono indubbia testimonianza l'assenza di stabile cultura, l'imperfetto e instabile scolo delle acque e soprattutto la posizione inclinata dei rari alberi. Tra Ripaberarda e Appignano, sul versante NE della dorsale, elevata in media 400 m., che divide la valle del Chifente da quella del Bretta, il fenomeno è chiaramente osservabile in parecchi punti, specialmente nei dintorni di S. Angelo e alla Casa d'Oro, dove ne fa fede appunto la singolare inclinazione degli alberi in una direzione comune. Tale processo ha naturalmente per effetto l'abbassamento progressivo delle dorsali-spartiacque, nelle quali si osservano ben spesso — in corrispondenza ai punti dov'esso ha luogo con maggior intensità — caratteristiche depressioni in forma di selle: nella regione or ora indicata per es., lo spartiacque Chifente-Bretta si deprime sotto i 365 m. in una piccola sella presso la casa Alessandrini; del pari lungo la strada rotabile Offida-Castel di Lama, al bivio per Appignano, lo spartiacque tra il Chifente e il fosso Lama si deprime a 193 m. in un'altra selletta; una terza se ne può indicare sullo spartiacque tra il fosso Fiorano (Chiaro) e il Bretta a NNW del Colle del Gallo presso la casa Matricardi (395 m.); e così via.

Ma i burroni o *canali*, più o meno profondi e complicati, dalla cui unione risulta il calanco, guadagnano continuamente per erosione regressiva a spese delle dorsali spartiacque, talchè non è raro il caso che queste, attaccate da ambo i versanti, si assottiglino man mano, foggiandosi in creste più o meno anguste e sottili: così la dorsale che separa il fosso d'Ischia dal fosso della Ripa si è ormai trasformata, per l'estendersi a ritroso dei calanchi, in una cresticciola assai acuta; e di uno stadio ancor più avanzato si osserva l'esempio presso Porchiano, dove l'erosione regressiva del fosso di Porchiano da un lato, dei burroncelli a sinistra del Chiaro Morto dall'altro, ha intaccato in tal modo lo spartiacque, ch'esso non è più rappresentato oggi se non da una cresta larga in qualche punto meno di tre metri, su cui passa la mulattiera da Porchiano ad Ascoli, malamente sorretta da steccati, e destinata tra breve a scomparire.

Fenomeni di erosione accelerata nelle regioni argillose, analoghi a quelli

da noi ora brevemente accennati, furono recentemente studiati in parte dal Götzingher nella Foresta Viennese <sup>(1)</sup> e segnalati anche da G. Braun in talune località dell'Appennino Bolognese (Valle del Reno) <sup>(2)</sup>; ambedue questi autori cercarono di porli in relazione con la evoluzione morfologica della regione considerata. Nella zona sulla sinistra del Tronto inferiore, oggetto della presente Nota, tali fenomeni hanno determinato in sostanza, in una con la bizzarra complicità del rilievo, i dettagli della circolazione delle acque superficiali. Se prendiamo le mosse dal momento in cui, emersa ormai questa zolla di terreno dalle acque dell'Adriatico pliocenico, si formò la valle del Tronto, l'evoluzione morfologica si può brevemente riassumere come segue.

Dapprima si foggì un certo numero di corsi d'acqua, diretti all'incirca da nord a sud (Chiaro, Bretta, Riccione, Chifente, Lama), i quali cominciarono ad incidere la regione, mettendo a nudo le argille, che, come si disse in principio, dovevano essere originariamente, almeno in molte parti, ricoperte dalla formazione sabbioso-conglomeratica alquanto più resistente. Sui fianchi di queste nuove vallate si iniziarono in seno alle argille gli smottamenti, piccoli ma continui, e gli incavi da questi lasciati, del pari che i solchi facilmente prodotti dalle acque selvagge, avviarono la formazione dei calanchi e di vallette secondarie, inestantisi ad angolo retto nelle primarie e allungantisi a ritroso a poco a poco per erosione regressiva. Al contatto fra la formazione sabbioso-conglomeratica e l'argillosa si formarono *ripe* e *balze*, la cui retrocessione, lenta, ma incessante, restringeva sempre più l'estensione della prima formazione, ormai relegata nelle parti più elevate, presso le zone displuviali. Scomparsa essa anche di qua, come in molti luoghi è avvenuto o sta per avvenire, le dorsali spartiacque rimangono costituite di sola argilla e tendono, pei processi già descritti, a trasformarsi in creste. Le valli secondarie si allungano a ritroso sempre di più e si complicano pel generarsi successivo di vallecole terziarie ecc., mentre le valli primarie si van vieppiù approfondendo <sup>(3)</sup>, ma contemporaneamente si allargano in modo anormale per l'eccezionale rapidità della denudazione sui loro fianchi, in modo da assumere, non il regolare profilo a V caratteristico delle valli giovani, ma un profilo molto più dolce e sdraiato, che le fa sembrar più vecchie di quello che non siano in realtà. Tale è lo stadio presente della regione qui considerata.

I processi di erosione accelerata da noi brevemente descritti, sono tut-

<sup>(1)</sup> Götzingher G., *Beiträge zur Entstehung der Bergrückenformen*, in Penck's Geogr. Abhandl., Lipsia, 1907, vol. XIII.

<sup>(2)</sup> Braun G., *Beiträge zur Morphologie des nördl. Appennin*, in Zeitschr. der Gesellschaft. für Erdk. zu Berlin, 1907, fasc. X e XI.

<sup>(3)</sup> Il livello di base dell'erosione, rappresentato per i torrenti su ricordati dal Tronto e per questo dal mare, continua forse ad abbassarsi lentissimamente, perchè la spiaggia adriatica è probabilmente tuttora soggetta a bradisismo negativo.

tora in una fase di progresso, ma questo ha naturalmente un limite, che si fa, coll'andar del tempo, tanto più vicino, quanto più progredisce l'alluvionamento generale della regione, cui i processi medesimi in sostanza tendono.

Come conclusione di questa breve Nota ci sembra opportuno accennare all'influenza che esercitano nei riguardi dell'uomo la costituzione geologica del suolo ed i processi erosivi che ne sono l'immediata conseguenza.

Anzitutto è da ricordare la scarsezza di sorgenti, caratteristica comune più o meno a tutti i territori ad argille <sup>(1)</sup>, ove le acque piovane, trovando subito in superficie un terreno impermeabile, scorrono selvagge per le pendici favorendo appunto l'erosione, gli smottamenti ecc. Anche dove l'argilla si presenta superiormente screpolata e fessurata — come quasi ovunque si osserva nella stagione estiva — l'acqua può penetrar solo fino a profondità relativamente piccole e si consuma nell'impregnare e spappolare il materiale argilloso, di cui aiuta anche il lento scorrimento al basso; solo dove l'argilla è ricoperta ancora da uno strato di sabbia o conglomerato è possibile l'infiltrazione e la regolare circolazione dell'acqua sotterranea, che di solito affiora poi al contatto col sottostrato impermeabile <sup>(2)</sup>.

Di tale penuria di sorgive soffrono in genere tutti gli abitanti di questa contrada, i quali sono costretti a rintracciar l'acqua a grandi profondità mediante pozzi, spesso anche senza trovarla che in scarsa quantità e poco salubre <sup>(3)</sup>.

L'intensità dei processi erosivi ha per effetto in primo luogo di limitare lo spazio per le culture, escluse interamente dai fianchi delle valli, incise da calanchi e da forre, e ristrette ai dorsi un po' pianeggianti tra torrente e torrente, dorsi che peraltro, come sappiamo, si vanno restringendo sempre più. Danno peggiore è l'instabilità degli abitati, assai spesso minacciati da frane e scoscendimenti: già ricordammo le rovine che più volte ebbe a soffrire Castignano e avvertimmo il pericolo che corre Offida; anche Appignano è minacciato pel retroceder della *ripa* che ne costeggia le

(<sup>1</sup>) Nella nostra regione le più importanti sono le sorgenti dei dintorni di Capradosso, di cui una (Sorg. Cuccagna) fornisce l'acqua a Castignano e Offida e un'altra a Montedinove e altri paesi; poi la Fonte del Campo a NE di Ascoli, la Fonte Pagana presso Appignano ecc.; inoltre alcune sorgenti salate, come l'*Acqua salata*, sulla destra del fosso di Bretta, e un'altra presso l'alveo del rio Balcone, prossima alla casa Corradetti.

(<sup>2</sup>) Parecchie delle sorgenti ricordate nella nota precedente appartengono appunto a questa categoria: una tipica sorgente di contatto è anche quella, non indicata sulla carta, che sgorga al piede della rupe di Porchiano, costituita da conglomerato poco compatto riposante sulle solite argille.

(<sup>3</sup>) Tale penuria ha indotto gli abitanti a scavare altresì nel suolo argilloso, in luogo pianeggiante presso le case di campagna, piccoli bacini di forma rotonda o rettangolare, dove le acque piovane si raccolgono e per l'impermeabilità del terreno si mantengono a lungo; tali bacini, detti *paniani*, servono per abbeverare gli animali, per lavare i panni ecc.

case a SO; Porchiano, Ischia, Ripaberarda sono pure in condizione assai precaria.

Infine, anche le strade risentono l'influenza del terreno malfido; non potendo correre sull'asse o sui fianchi delle vallate, ove tutto si muove, sono costrette a mantenersi sulle linee di displuvio, seguendone ogni tortuosità, e presentano perciò tutti gli inconvenienti delle *strade di spartiacque*, caratteristiche delle regioni franose (<sup>1</sup>).

Il territorio sulla sinistra del Tronto inferiore è dunque in complesso tra i meno adatti all'insediamento umano, per le rapide trasformazioni superficiali; rapide, anche rispetto alla nostra esperienza breve, poichè si avvertirebbero in modo assai notevole sol che potessimo confrontare le nostre carte topografiche attuali con una, altrettanto precisa, di tre o quattro secoli fa; in mancanza di questa, i ricordi storici, per quanto scarsi e incompleti, bastano tuttavia a confermare le deduzioni che scaturiscono dall'esame geologico.

## MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

NEGRI A. *Sui corpi specifici dell'idrofobia*. Presentata dal Socio B. GRASSI.

## CONCORSI A PREMI

Il Segretario MILLOSEVICH dà comunicazione dei seguenti elenchi dei lavori presentati ai concorsi a premi, scaduti col 31 dicembre 1908.

Elenco dei lavori presentati al concorso al Premio Reale  
per l'*Astronomia*.

(Scadenza 31 dicembre 1908. — Premio L. 10.000).

1. BEMPORAD AZEGLIO. 1) « L'assorbimento selettivo dell'atmosfera terrestre sulla luce degli astri » (st.). — 2) « Sulla teoria della estinzione della luce degli astri nell'atmosfera terrestre » (ms.). — 3) « Saggio di una nuova formola empirica per rappresentare il modo di variare della radiazione solare » (st.). — 4) « L'assorbimento selettivo della radiazione solare nell'atmosfera terrestre e la sua variazione coll'altezza » (st.). — 5) « Saggio di nuovi metodi per lo studio della refrazione astronomica » (ms.). Il Con-

(<sup>1</sup>) Cfr. il mio lavoro: *Studi geografici sulle frane in Italia*, vol. I, in Memorie della Soc. Geogr. Ital., vol. XIII, Roma 1907, pp. 302-305.

corrente indica le Note da 1) a 5) come le Principali. Aggiunge una serie di lavori che indica come « Lavori minori ».

2. BOCCARDI GIOVANNI. 1) « Il metodo di Tietjen per la correzione dell'orbita di un pianeta » (st.). — 2) « Applicazione del metodo di Tietjen ai pianetini (366) e (416) » (st.). — 3) « Catalogo di stelle di riferimento fra  $+46^{\circ}$  e  $+55^{\circ}$  » (st.). — 4) « Di alcune importanti semplificazioni al metodo di riduzione delle lastre del Catalogo fotografico di stelle » (st.). — 5) « Metodo di riduzione delle lastre del Catalogo stellare fotografico, per le zone di Catania » (st.). — 6) « Sulla precisione delle posizioni delle stelle ottenute mediante la fotografia ». Nota I (st.). — 7) « Sulla precisione delle posizioni stellari ottenute col metodo fotografico » (st.). — 8) « Sulla precisione delle posizioni degli astri ottenute col metodo fotografico » (st.). — 9) « Sulle orbite dei pianeti (347) e (416) » (st.). — 10) « L'Annuario Astronomico dell'Osservatorio di Torino, fatti e considerazioni » (st.). — 11) « Orbita definitiva del pianeta (347) Pariana » (st.). — 12) « Metodo per la determinazione delle costanti dell'istrumento meridiano » (st.). — 13) « Ascensioni rette di alcune stelle fondamentali ecc. » (st.). — 14) « Osservazioni di ascensioni rette eseguite nel R. Osservatorio di Torino, negli anni 1904-06, I e II parte (osservazioni) » (st.). — 15) « In aequationem quam decimalem vocant, animadversiones » (st.). — 16) « Applicazione di un nuovo metodo per la ricerca dei moti propri » (st.).

3. CIRILLO NICOLA. 1) « Colossale scoperta (L'ultimo colpo alle vecchie teorie astronomiche) » (ms.).

4. RICCÒ ANNIBALE. 1) « Astrofisica del sole » (Memorie I-XVI) (st.). — 2) « Studi astrofisici di altri corpi celesti » (XVII-XX) (st.). — 3) « Fotografia celeste » (XXI-XXVI) (st.). — 4) « Determinazioni di gravità » (XXVII-XXXI) (st.).

#### Elenco dei lavori presentati

per concorrere al premio *Carpi* per la *Fisiologia sperimentale*.

(Scadenza 31 dicembre 1908. — Premio L. 900).

1. BAGLIONI SILVESTRO. « L'eccitabilità diretta dai centri nervosi agli stimoli artificiali » (ms.).

2. LOMBRoso UGO. « Gli elementi che compiono la funzione interna del pancreas » (ms.).

3. LUZZATTO GIUSEPPE. « Influenza dei suoni sull'organismo umano » (ms.).

Lavori inviati per esser presi in considerazione  
pel premio *Santoro*.

1. CANOVETTI COSIMO. « Memorie varie sulla resistenza dell'aria, sull'aerostazione, sull'aviazione » (st.).
2. MAJORANA QUIRINO. « Ricerche ed esperienze di telefonia elettrica senza filo » (Memorie I st., II-III ms.).
3. STERZI GIUSEPPE. « Il sistema nervoso centrale dei Vertebrati, Vol. I. Ciclostomi » (st.).

CORRISPONDENZA

Il Presidente BLASERNA comunica il sunto d'una Relazione inviata al Presidente del Consiglio riguardante gli studi preliminari da farsi in ordine teorico e pratico, prima di venire alle ricostruzioni dei paesi colpiti dal terremoto, e ciò in ossequio alla deliberazione presa dall'Accademia nella Seduta di Classe del 3 gennaio corrente.

Il Socio BATTISTA GRASSI, facendo plauso alle sapienti proposte del PRESIDENTE, aggiunge che sarà importante tener conto anche dei cambiamenti che eventualmente potrebbero essersi verificati nella fauna marina, se veramente il fondo e le correnti si sono modificate. Spiega questo suo concetto, ricordando come in determinati punti dello Stretto di Messina vengano portati alla superficie da correnti marine determinati animali abitanti degli abissi. È oggigiorno importante stabilire se e dove questo fenomeno siasi modificato.

Il Socio Grassi ricorda inoltre che in Calabria e in Sicilia i Termiti sono molto dannosi al legname e che di ciò occorre tener molto conto nelle progettate costruzioni in legno.

Infine accenna ad un Atlante del Socio CARLO DE STEFANI, comprendente carte geologiche della Calabria meridionale, la cui pubblicazione doveva venir fatta dalla nostra Accademia già da molti anni e che fu sospesa per mancanza di mezzi. Questo Atlante è diventato di triste attualità e merita di essere presa in considerazione la domanda dell'Autore, che lo vorrebbe pubblicare al più presto.

E. M.